

**Анализ типичных ошибок, допущенных
участниками диагностики образовательных
достижений по учебному предмету
«Математика (профильный уровень)»**

Цель диагностической работы:

определить уровень математических знаний выпускников, планирующих сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Варианты диагностической работы соответствуют спецификации контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике профильного уровня и кодификатора проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике.

- 1. Открытый банк заданий ЕГЭ (<https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege>) на сайте ФГБНУ «ФИПИ».**
- 2. Навигатор самостоятельной подготовки (<https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege#ma>) на сайте ФГБНУ «ФИПИ».**

Спецификация КИМ для проведения в 2024 году ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Уровень сложности	Б	Б	Б	Б	П	Б	Б	Б	П	П	П	П
Максимальный балл	1	1	1									

Номер задания	13	14	15	16	17	18	19
Уровень сложности	П	П	П	П	П	В	В
Максимальный балл	2	3	2	2	3	4	4

Максимальный первичный балл за работу - 32

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях и предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задания части 2 направлены на проверку освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения в профессиональной деятельности и на творческом уровне, и предназначены для более точной дифференциации абитуриентов ведущих вузов.

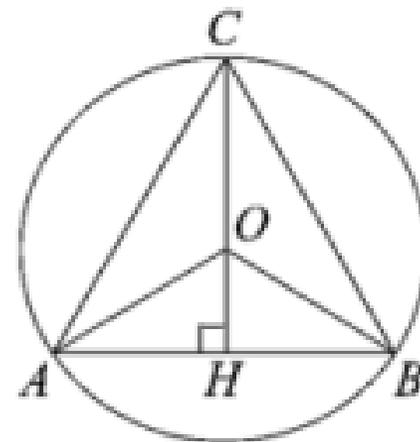
Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Базовый уровень сложности

1 Высота правильного треугольника равна 78. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: _____.



Комментарий

Геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

Необходимо знать связь между стороной правильного треугольника и радиусом описанной окружности или применять следствие из теоремы синусов.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Базовый уровень сложности

2

Длина вектора \vec{a} равна 105, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 150° , а скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно $-42\sqrt{3}$. Найдите длину вектора \vec{b} .

Ответ: _____.

Комментарий

Геометрическая задача на координаты и векторы.

Необходимо знать формулу для нахождения скалярного произведения двух векторов, значение косинуса тупого угла.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Базовый уровень сложности

3

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CD = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$. Точка K – середина ребра DD_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1 , B_1 и K .

Ответ: _____.

Комментарий

Геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

Необходимо уметь строить сечение многогранника плоскостью, определять вид четырехугольника, находить площадь многоугольника.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Базовый уровень сложности

6

Решите уравнение $\sqrt{45 - 4x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

Комментарий

Задача на умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов. Необходимо выполнять равносильные преобразования при возведении обеих частей уравнения в четную степень или делать проверку.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Базовый уровень сложности

7

Найдите значение выражения $\frac{14 \sin 118^\circ}{-\sin 59^\circ \cdot \sin 31^\circ}$.

Ответ: _____.

Комментарий

Задача на применение известных формул и правил, нахождение значений тригонометрических функций.

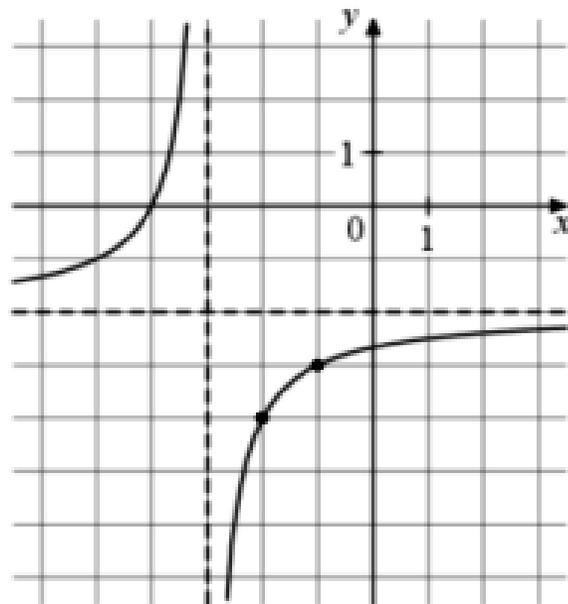
Необходимо знать формулы приведения, синуса двойного угла.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Повышенный уровень сложности

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите a .



Комментарий

Задача на выполнение действий с функциями.

Необходимо знать графики основных элементарных функций, понимать выполнение преобразований при их построении.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 1

Повышенный уровень сложности

12

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 11e^x + 5$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: _____.

Комментарий

Задача на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции с использованием производной. Необходимо уметь находить производную сложной функции, знать алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Задачи, вызвавшие затруднения

Часть 2

№13

Повышенный уровень сложности

а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x + 7 - 10\cos^2 \frac{x}{2}\right) \log_{\sqrt{7}}(\sin x) = 0$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение.

а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x > 0$.

Если $\log_{\sqrt{7}}(\sin x) = 0$, то $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{\sqrt{7}}(\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x + 7 - 10\cos^2 \frac{x}{2} = 0$, откуда $\cos x = 2$ или

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.

Учитывая, что $\sin x > 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовых неравенств отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k < -\frac{3\pi}{2},$$

$$-\frac{9}{4} \leq k < -1.$$

$$\text{При } k = -2 \quad x = -\frac{7\pi}{2}.$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n < -\frac{3\pi}{2},$$

$$-\frac{13}{6} \leq n < -\frac{11}{12}.$$

$$\text{При } n = -2 \quad x = -\frac{11\pi}{3},$$

$$\text{при } n = -1 \quad x = -\frac{5\pi}{3}.$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{2}$.

Способы отбора корней уравнения с помощью:

- неравенств,
- числовой окружности,
- организованного перебора,
- графика,
- числовой прямой.

15

Решите неравенство
$$\frac{2^{-8x} - 9}{4^{-4x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x + 5} \geq \frac{2}{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} - 1}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

№15

Решение.

Запишем неравенство в виде:
$$\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{2x} - 9}{4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{2x} - 21 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x + 5} \geq \frac{2}{4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x - 1}.$$

Пусть $t = \left(\frac{1}{16}\right)^x$, тогда неравенство примет вид:
$$\frac{t^2 - 9}{4t^2 - 21t + 5} \geq \frac{2}{4t - 1};$$

$$\frac{t^2 - 9}{(4t - 1)(t - 5)} - \frac{2}{4t - 1} \geq 0; \frac{t^2 - 2t + 1}{(4t - 1)(t - 5)} \geq 0; \frac{(t - 1)^2}{(4t - 1)(t - 5)} \geq 0,$$

откуда $t < \frac{1}{4}; t = 1; t > 5$.

При $t < \frac{1}{4}$ получим: $\left(\frac{1}{16}\right)^x < \frac{1}{4}$, откуда $x > 0,5$.

При $t = 1$ получим: $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 1$, откуда $x = 0$.

При $t > 5$ получим: $\left(\frac{1}{16}\right)^x > 5$, откуда $x < \log_{\frac{1}{16}} 5$.

Решение исходного неравенства: $x < \log_{\frac{1}{16}} 5; x = 0; x > 0,5$.

Ответ: $\left(-\infty; \log_{\frac{1}{16}} 5\right); 0; (0,5; +\infty)$.

В июле 2025 года планируется взять кредит на шесть лет в размере 1800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026 и 2027 годов долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 и 2031 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Какой долг будет в июле 2028 года, если сумма всех платежей после полного погашения кредита будет составлять 3213 тыс. рублей?

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{36-y^2} = \sqrt{36-a^2x^2}, \\ x^2+y^2 = 4x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a < -\frac{3}{2}$; $a = -\frac{2}{3}$; $a = 0$; $a = \frac{2}{3}$; $a > \frac{3}{2}$.

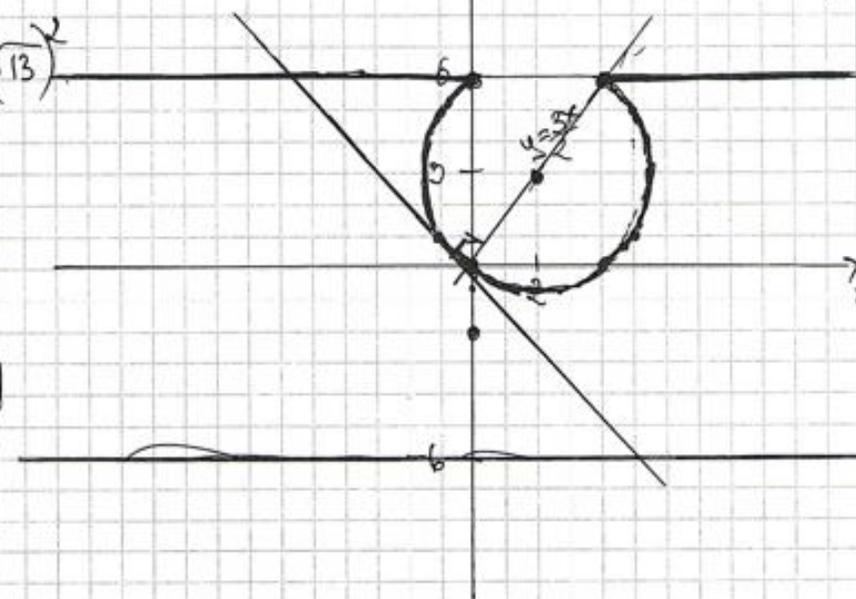
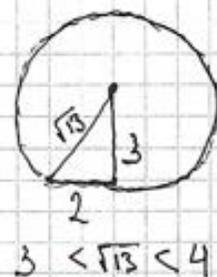
$$\begin{cases} \sqrt{36-y^2} = \sqrt{36-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36-y^2 \geq 0 \\ 36-y^2 = 36-a^2x^2 \\ x^2-4x+y^2-6y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq y \leq 6 \\ y = \pm ax \\ x^2-2 \cdot 2x+4+y^2-3y+3 = (\sqrt{13})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq y \leq 6 \\ y = \pm ax \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{13})^2 \end{cases}$$

Нас интересует
какая часть будет
включена из окружности
т.е. y от
 $-\frac{3}{2}$ до $\frac{3}{2}$.
не включена



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением не более двух из пяти точек: $a = -\frac{3}{2}$, $a = -\frac{2}{3}$, $a = 0$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением более двух из пяти точек: $a = -\frac{3}{2}$, $a = -\frac{2}{3}$, $a = 0$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Дядя Фёдор подарил Матроскину на День Рождения телефон, на который они вместе установили игру «Математические загадки». За прохождение каждого уровня игры на телефоне можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора телефона уменьшается на 4 пункта при получении трёх звёзд, на 8 пунктов при получении двух звёзд и на 12 пунктов при получении одной звезды. Матроскин прошёл несколько уровней игры подряд.

- а) Мог ли Матроскин в ходе игры уменьшить заряд аккумулятора ровно на 30 пунктов?
- б) Мог ли Матроскин в ходе игры уменьшить заряд аккумулятора на 80 пунктов и суммарно получить 12 звёзд?
- в) За пройденный уровень начисляется 5000 очков при получении трёх звёзд, 4000 – при получении двух звёзд и 2000 – при получении одной звезды. Какое наименьшее количество очков мог получить Матроскин, если заряд аккумулятора уменьшился на 80 пунктов и суммарно было получено 12 звёзд?

Ответ: а) нет; б) да; в) 22 000.

Комментарий

Задача на умение применять изученные методы в нестандартной ситуации, в которой главным является не преодоление технических сложностей, а поиск пути решения. Задача имеет исследовательский характер, требует проверки подтверждения или опровержения гипотез.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>b</i> и <i>c</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>c</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>b</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>c</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4