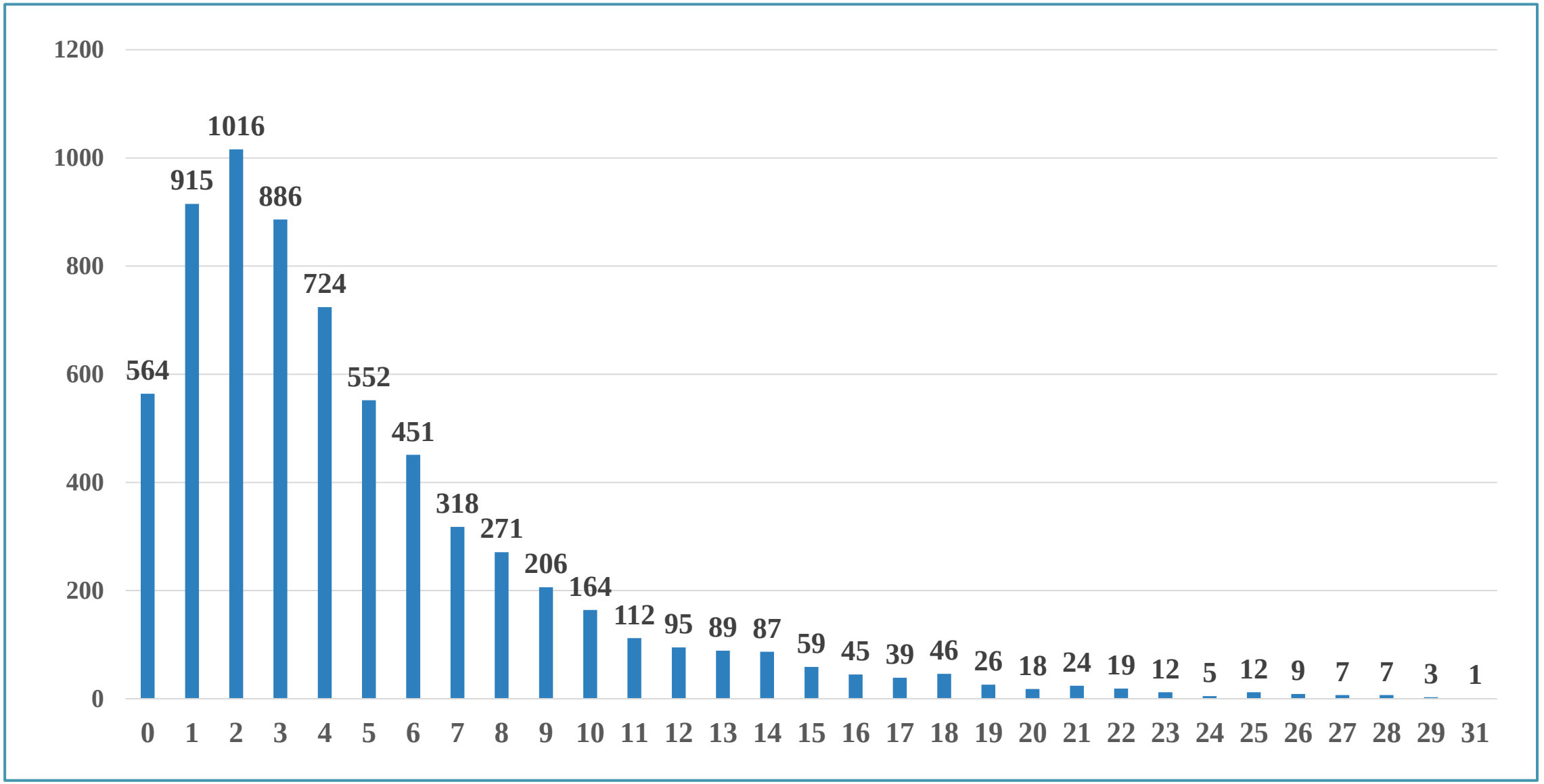
НОВОСИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ МОНИТОРИНГА И РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Результаты тренировочного мероприятия в 11 классах по учебному предмету «Математика (профильный уровень)»

Подолян Елена Вячеславовна, к.п.н., доцент кафедры инженерной математики НГТУ, председатель предметной комиссии Новосибирской области
Ерышев Николай Андреевич, учитель математики МАОУ «Лицей № 200», заместитель председателя предметной комиссии Новосибирской области

НОВОСИБИРСК 2026

Диаграмма распределения тестовых баллов участников предметной диагностической работы



Задания части 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
%	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782
X	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
0	83,80%	35,71%	53,17%	59,23%	74,89%	55,49%	71,53%	57,17%	62,05%	83,25%	77,22%	86,52%
1	16,20%	64,29%	46,83%	40,77%	25,11%	44,51%	28,47%	42,83%	37,95%	16,75%	22,78%	13,48%

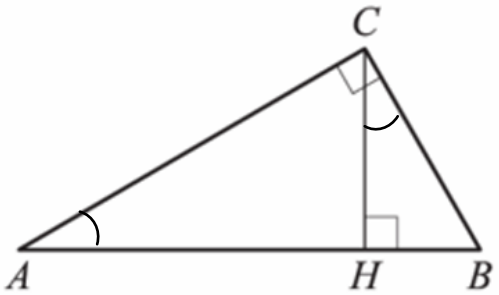
Задания части 2

№ задания	13	14	15	16	17	18	19
%	6782	6782	6782	6782	6782	6782	6782
X	69,89%	86,33%	74,76%	80,93%	83,10%	89,74%	80,61%
0	18,37%	7,17%	19,60%	11,52%	7,08%	5,28%	13,20%
1	4,36%	5,31%	1,27%	2,54%	7,74%	1,47%	4,64%
2	7,37%	0,19%	4,38%	5,01%	0,31%	1,18%	1,28%
3		1,00%			1,77%	0,24%	0,03%
4						2,09%	0,24%

Задания с кратким ответом

Геометрические задачи

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB = 15$, $\operatorname{tg} A = 7$. Найдите AH.



Решение.

$$\angle HCB = \angle HAC, \operatorname{tg}\angle HCB = \operatorname{tg}\angle HAC = 7$$

Из $\triangle AHC\ (\angle H = 90^0)$ $CH = 7 \cdot AH$

Из $\triangle BHC\ (\angle H = 90^0)$ $HB = 7 \cdot CH$

Значит, $HB = 7 \cdot 7AH = 49AH$

Так как $AH + HB = AB$, то

$$AH + 49AH = 15$$

$$50AH = 15$$

$$AH = 0{,}3$$

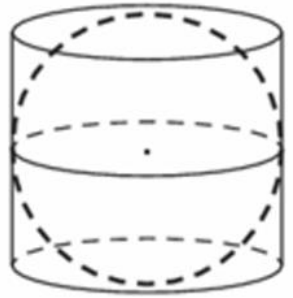
Ответ: 0,3

16,20%

Задания с кратким ответом

Геометрические задачи

3 Цилиндр, объём которого равен 114, описан около шара. Найдите объём шара.



Комментарий: неверная подстановка в формулу объема шара промежуточного значения $2\pi R^3 = 114$, потеря числового множителя 2.

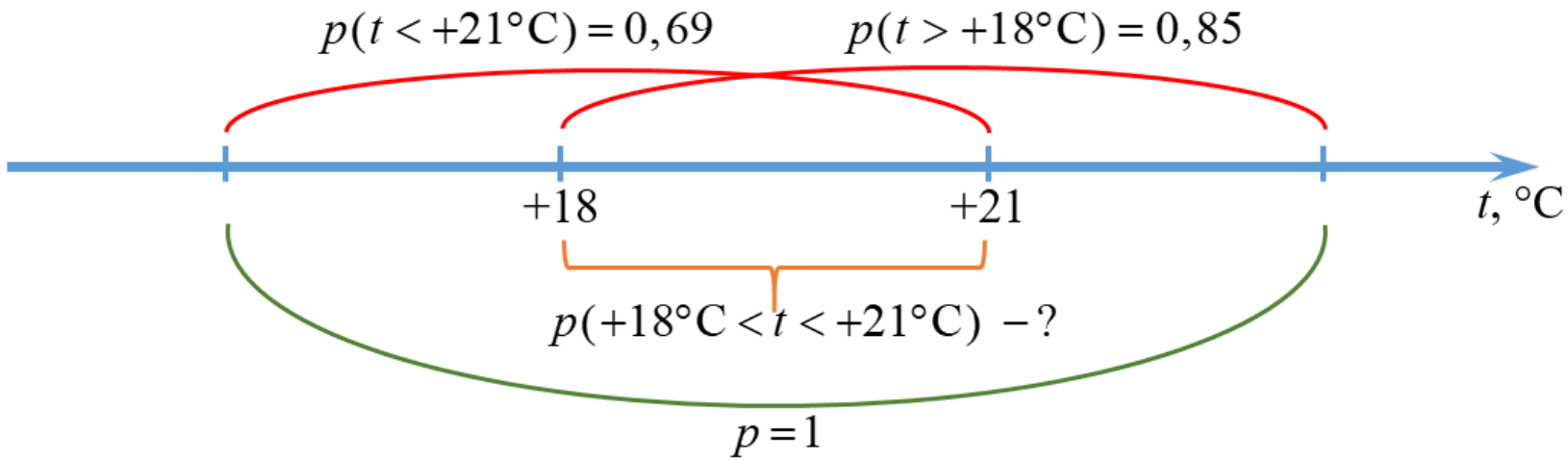
46,83%

Задания с кратким ответом

Вероятность

4 Термометр измеряет температуру в помещении. Вероятность того, что температура окажется выше +18 °C, равна 0,85. Вероятность того, что температура окажется ниже +21 °C, равна 0,69. Найдите вероятность того, что температура в помещении окажется в промежутке от +18 °C до +21 °C.

Решение.



Первый способ:

$p(t \geq +21°C) = 1 - p(t < +21°C) = 1 - 0,69 = 0,31$

$p(+18°C < t < +21°C) = p(t > +18°C) - p(t \geq +21°C) = 0,85 - 0,31 = 0,54$

Второй способ:

$p(+18°C < t < +21°C) = 0,85 + 0,69 - 1 = 0,54$

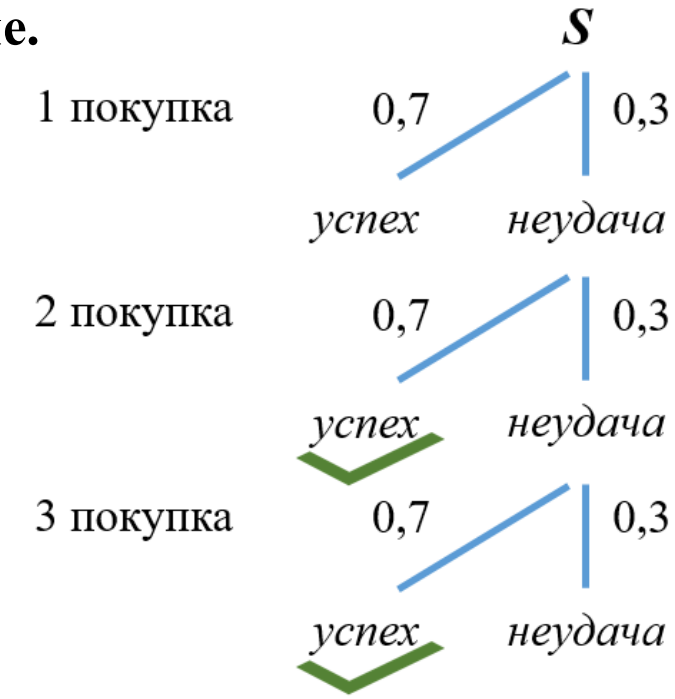
40,77%

Задания с кратким ответом

Вероятность

5 Яна коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Яны уже есть три разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Яне придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Решение.



успех – новая принцесса в одной покупке

$p(\text{"}успех\text{"}) = 0,7$

$p(\text{"}неудача\text{"}) = 1 - 0,3$

$p(\text{"}успех \text{ во } 2\text{-й или в } 3\text{-й покупке"}) =$

$= 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,273$

25,11%

Задания с кратким ответом

Уравнения, преобразования

6 Решите уравнение $\log_2(x+4)=\log_4(-2-x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Комментарий: корни квадратного уравнения -6;-3. С учетом ограничений верный ответ -3.

44,51%

7 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)^2}{8+\sqrt{55}}+7\sin\dfrac{23\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{23\pi}{12}$.

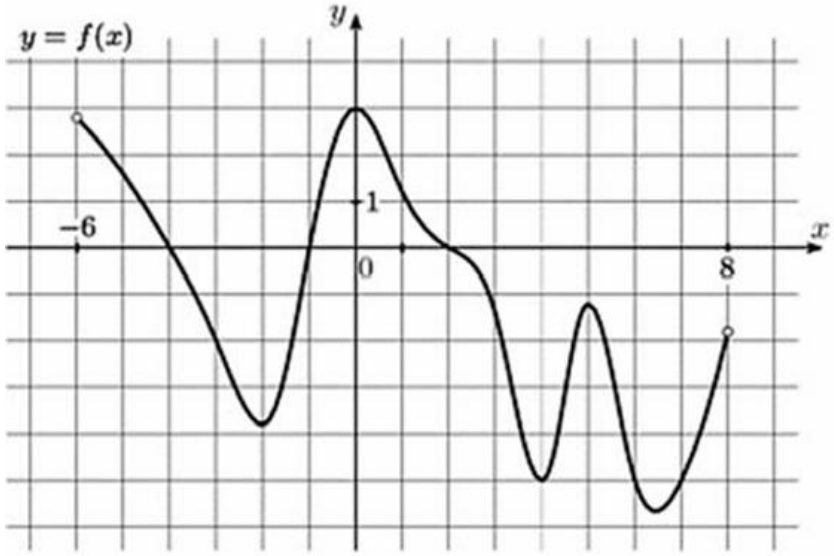
28,47%

Комментарий: неверное применение формулы синуса двойного угла. Вместо $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha$ записывается $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin2\alpha$.

Задания с кратким ответом

Производная, первообразная

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. $F(x)$ – одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 2$ или совпадает с ней.



Комментарий: незнание определения первообразной, неверное понимание геометрического смысла производной и условия параллельности прямых. Вместо количества искомых точек находятся точки минимума и экстремума заданной функции.

42,83%

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^{x} - 4$ на отрезке $[0; 2]$.

13,48%

Комментарий: ошибочный подход к нахождению наименьшего значения функции (нахождение значений функции только на концах отрезка)

Задания с кратким ответом

Текстовые задачи

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

Комментарий: ошибочный подход к нахождению промежутка времени. В ответ записывается наименьшее или наибольшее значение времени.

37,95%

10 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 42 минуты, второй и третий – за 56 минут, а первый и третий – за 1 час 12 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

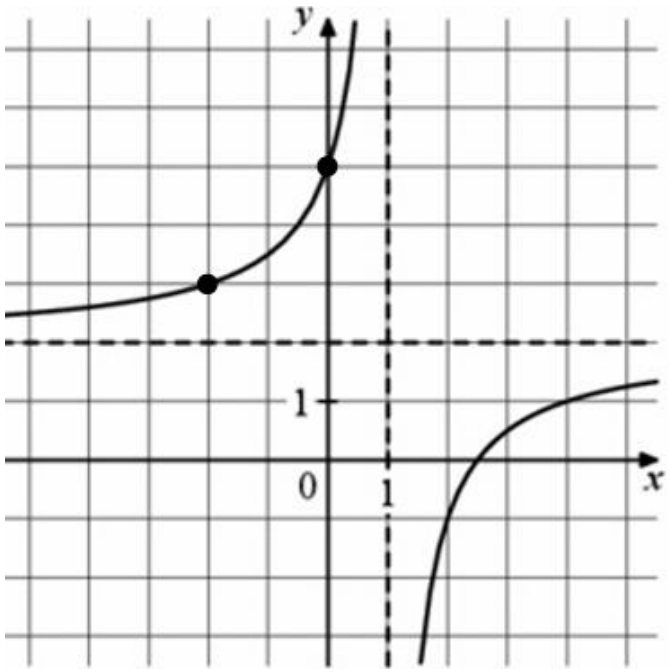
Комментарий: задача на вычисление общей производительности, которая зависит от времени. Неверный подход к решению - нахождение среднего арифметического значения времени.

13,48%

Задания с кратким ответом

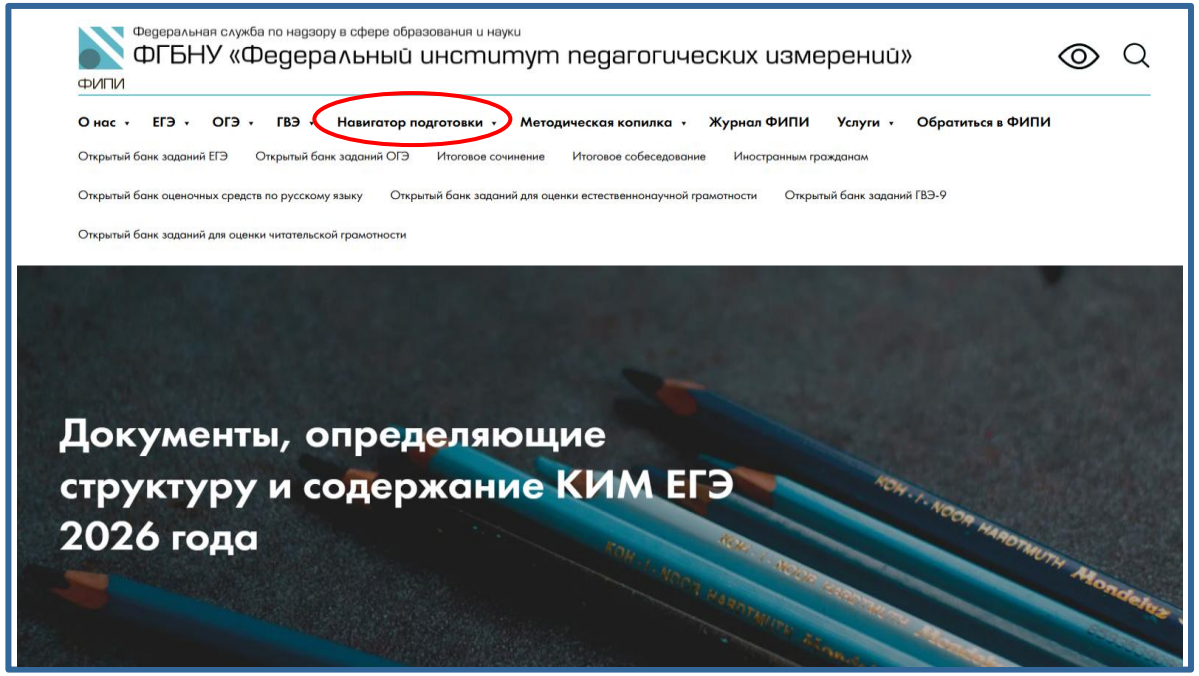
Функции, графики

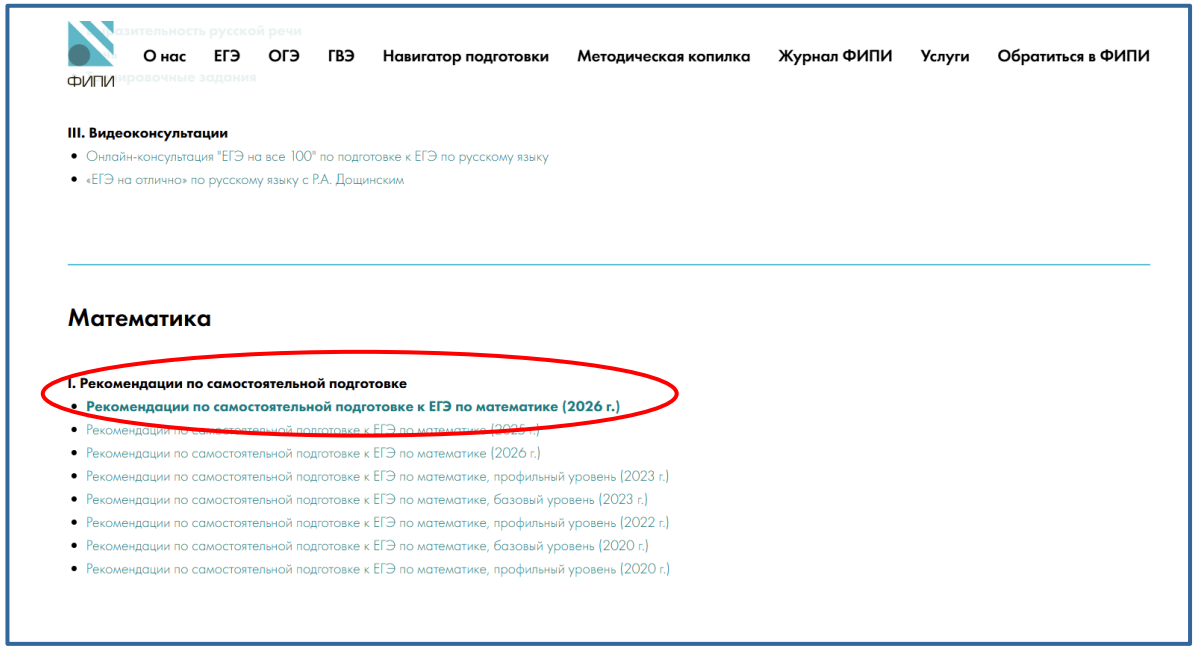
11 На рисунке изображён график функции $f(x)=\dfrac{kx+a}{x+b}$. Найдите значение k.

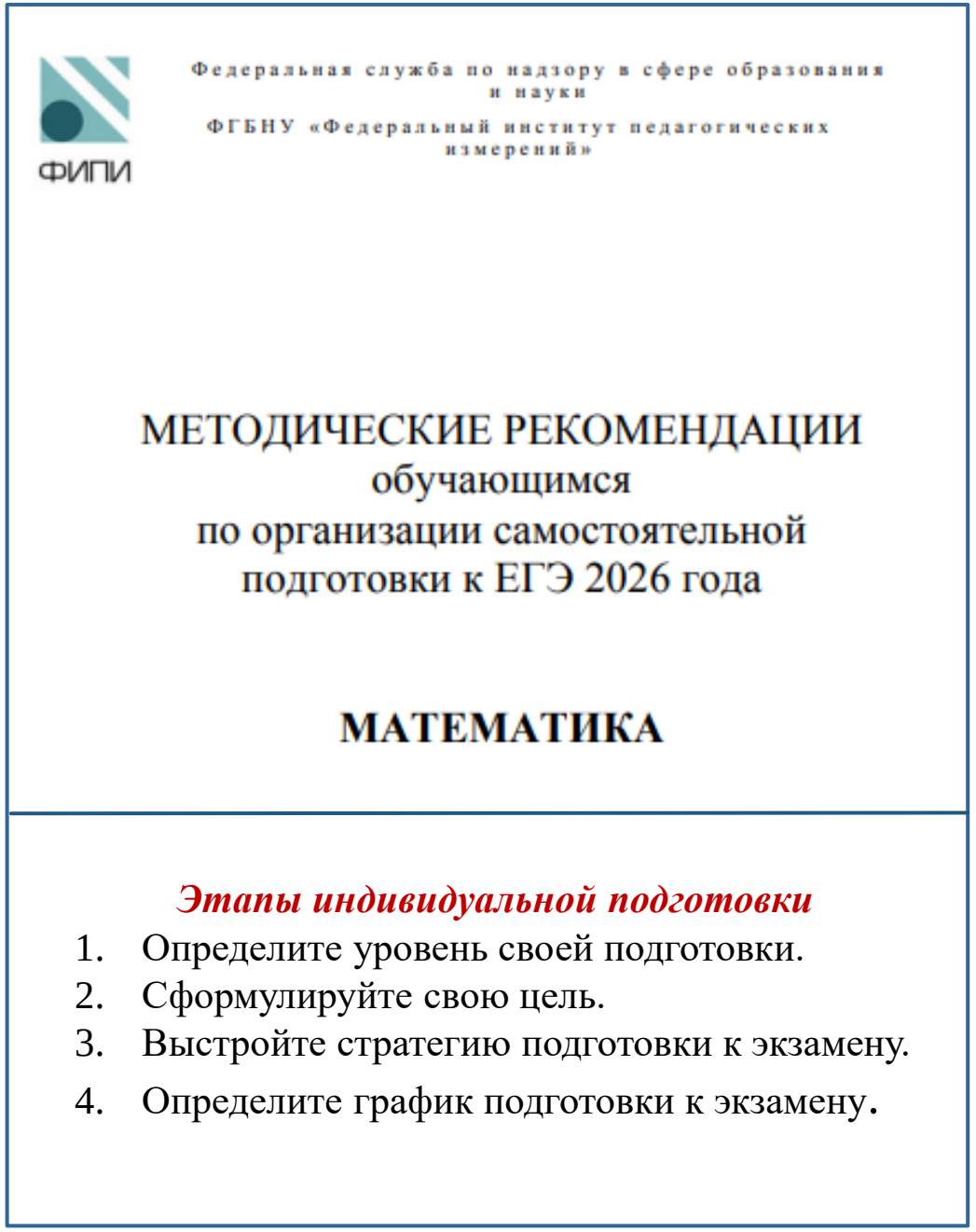


Комментарий: коэффициент b определяется по рисунку; для нахождения коэффициентов k и a необходимо использовать координаты заданных на рисунке точек.

22,78%







Этапы индивидуальной подготовки

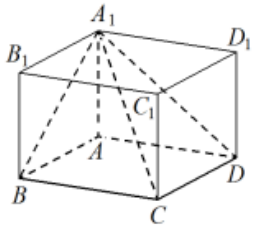
1. Определите уровень своей подготовки.
2. Сформулируйте свою цель.
3. Выстройте стратегию подготовки к экзамену.
4. Определите график подготовки к экзамену.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 3.1

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=9$, $AA_1=4$.

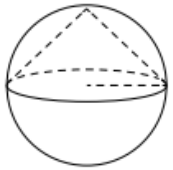
Ответ: 36.



Пример 3.2

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.

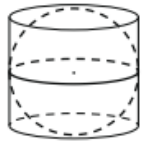
Ответ: 96.



Пример 3.3

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 21. Найдите площадь поверхности шара.

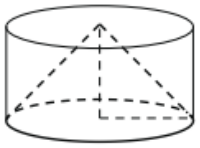
Ответ: 14.



Пример 3.4

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

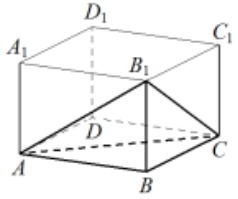
Ответ: 3.



Пример 3.5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=9$, $BC=7$, $AA_1=6$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.

Ответ: 63.



Пример 10.1

Заказ на изготовление 192 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 4 детали больше?

Ответ: 12.

Пример 10.2

Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей на 7 км/ч скорости первого, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 63.

Пример 10.3

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 ч. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 16.

Пример 10.4

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 8.

Пример 10.5

Два велосипедиста одновременно отправились в 220-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 9 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20.

Пример 10.6

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 468 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 47 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 4.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример. а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

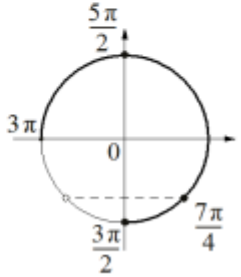
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$;

$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$; $\cos^2 x \cdot \left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$. Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

Отбор корней с помощью числовой окружности – это не единственный способ отбора корней. Корни можно отбирать и с использованием неравенств.

Для нахождения корней серии $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, составим неравенство и решим его:

$$\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 3\pi;\ 3 \le 1 + 2k \le 6;\ 1 \le k \le 2{,}5.$$

Так $k \in \mathbb{Z}$, то при $k = 1$ корень $x = \frac{3\pi}{2}$, при $k = 2$ корень $x = \frac{5\pi}{2}$.

Для нахождения корней серии $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, составим неравенство и решим его:

$$\frac{3\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le 3\pi;\ 6 \le -1 + 8n \le 12;\ \frac{7}{8} \le n \le \frac{13}{8}.$$

Так $n \in \mathbb{Z}$, то при $n = 1$ корень $x = \frac{7\pi}{4}$.

Для нахождения корней серии $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, составим неравенство и решим его:

$$\frac{3\pi}{2} \le -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m \le 3\pi;\ 6 \le -3 + 8m \le 12;\ \frac{9}{8} \le m \le \frac{15}{8}.$$

Целых значений m нет, следовательно, корней, принадлежащих данному отрезку, в этой серии нет.

Получили корни исходного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$: $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

Задачи с развернутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$\sin 3x - 4\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos 2x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задачи с развернутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$\sin 3x - 4\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos 2x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z},$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}.$

Задачи с развернутым ответом

Задание №13

1) №13 а) $\sin 3x - 4\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\cos 2x = 0$

$\sin(x+2x) - 4\sin x \cdot (1-2\sin^2 x) = 0$

$\sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x - 4\sin x(1-2\sin^2 x) = 0$

$\sin x(1-2\sin^2 x) + \cos x \cdot 2\sin x\cos x - 4\sin x + 8\sin^3 x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x - 4\sin x + 8\sin^3 x = 0$

$6\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x - 3\sin x = 0 \quad | : \sin x \neq 0$

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Потеря множеств при решении простейших тригонометрических уравнений

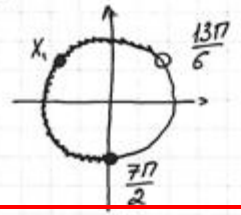
$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in Z\\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$

Ответ: а) $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; x=\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z},$ $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}.$

Потеря множества решении

б) Найдем корни, принадлежащие промежутку $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right]$

$x_1 = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n : n\in Z\right\}$

б) $\frac{17\pi}{6}$

Неверный ответ

Задачи с развернутым ответом

Задание №13

2) $\sin 3x - 4\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos 2x = 0$ $\quad \left(\frac{13\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2}\right]$

$\sin(2x+x) - 4\sin x\,(1 - 2\sin^2 x) = 0$

$\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x - 4\sin x + 8\sin^3 x = 0$

$2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x - 4\sin x + 8\sin^3 x = 0$

$-4\sin^3 x + 3\sin x - 4\sin x + 8\sin^3 x = 0$

$4\sin^3 x - \sin x = 0$

$\sin x\,(4\sin^2 x - 1) = 0$

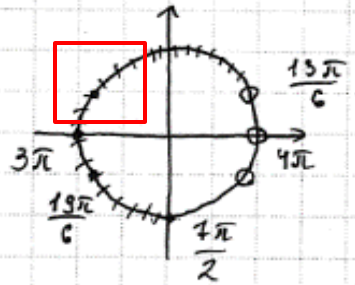
$\sin x = 0$ или $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$x_1 = \pi n,\ n \in Z$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

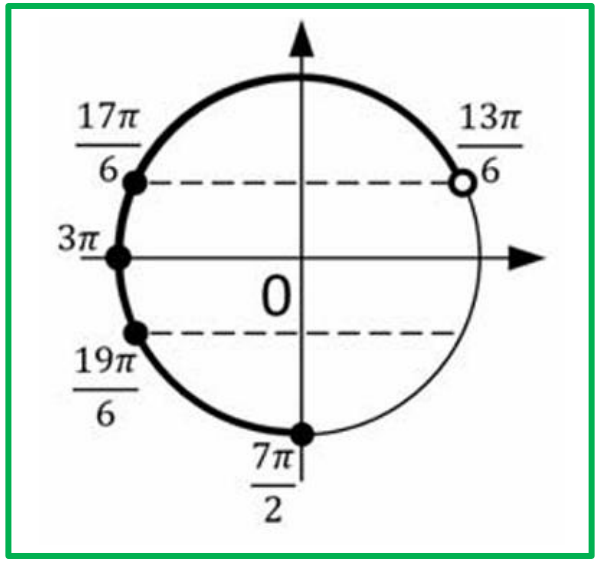
$x_3 = \frac{5\pi}{6} + \pi p,\ p \in Z$



$3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

$3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

Не подписан корень на дуге окружности



Ответ: а) $\pi n,\ n \in Z$; $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + \pi p,\ p \in Z$

б) $\frac{17\pi}{6}$; 3π; $\frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$,

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Задачи с развернутым ответом

Задание №13

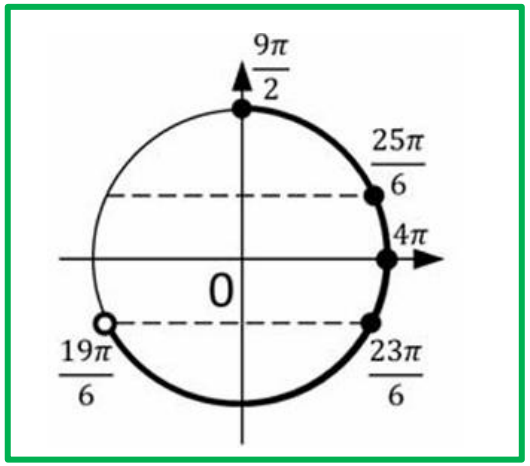
3) а) $4\sin^2 x \cdot \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x = 0$

$4\sin x \cdot \sin 2x - \sin 3x = 0$

$(4\sin x \cdot \sin 2x)(1 - \sin x) = 0$

Неверное применение формулы приведения

4) б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{19\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right]$.



б) $\frac{23\pi}{6}; 4\pi; \frac{25\pi}{6}$.

4) *Продолжение*

$\sin x = 0$

$x = \pi k; k \in Z$

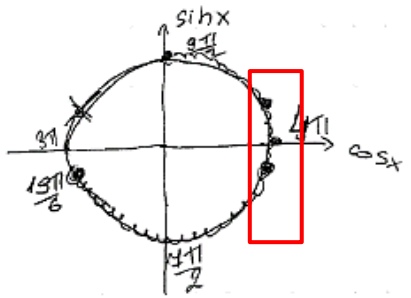
или $4\cos^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

б) Отбе́рём корни при помощи ед. окр.



$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{18\pi + \pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

$x_2 = 4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$

$x_3 = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{24\pi - \pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$

Ответ: а) $\pi k; k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$, б) $\frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$

Не подписаны корни на дуге окружности

В ответе записан посторонний корень

Задачи с развернутым ответом

Задание №13

5)

$$\sin x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \quad (I)\end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z\\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z\end{array}\right.$$

(I) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \quad /:\cos^2 x$

$1 - 3\,tg^2 x = 0$

$3\,tg^2 x = 1$

$tg^2 x = \frac{1}{3}$

$tg\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Сведение к однородному уравнению второй степени

6) $\sin x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$; $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$

$\cos^2 x = 3\sin^2 x = 3(1 - \cos^2 x) = 3 - 3\cos^2 x$

$4\cos^2 x = 3$; $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

~~$x_1 = \arccos 0$~~ $x_1 = \pi n, n \in Z$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

$x_3 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in Z$

Применение различных формул

7) а) $\sin 3x - 4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0$

$\sin 3x - 4\sin x \cdot \cos 2x = 0$

$3\sin x - 4\sin^3 x - 4\sin x \cos 2x = 0$

$3\sin x - 4\sin x(\sin^2 x + \cos 2x) = 0$

$3\sin x - 4\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

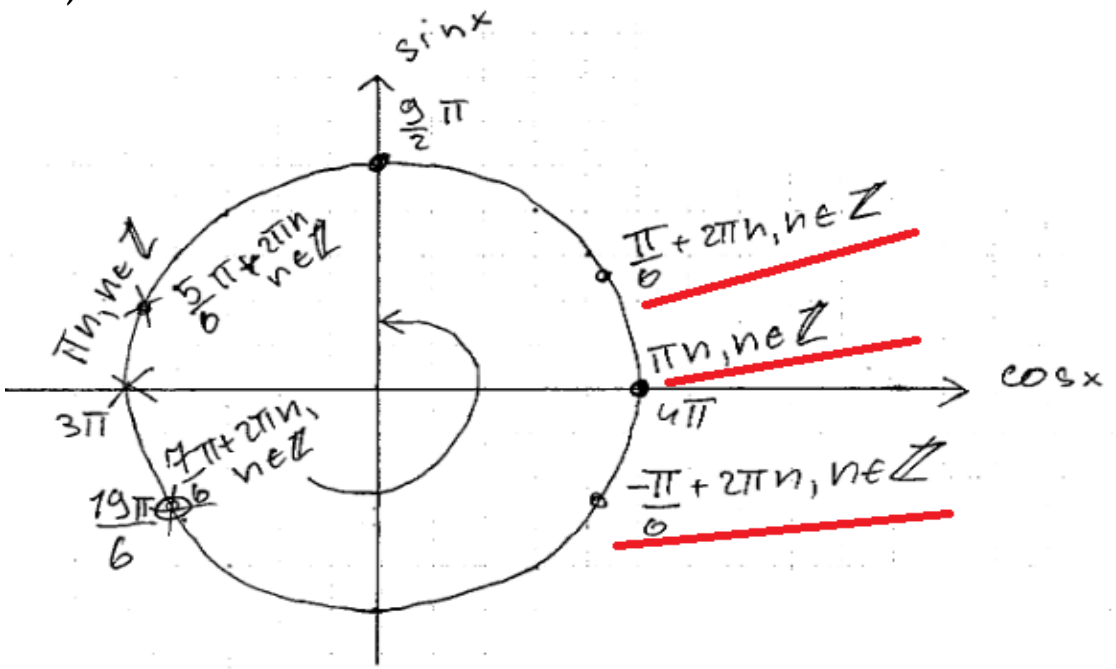
$3\sin x - 4\sin x(-\sin^2 x + 1) = 0$

Применение различных формул

Задачи с развернутым ответом

Задание №13

8)



9) а) $\frac{19\pi}{6} \le \pi k \le \frac{9\pi}{2} \quad |:\pi$

$3\frac{1}{6} \le k \le 4\frac{1}{2}$, так как $k \in \mathbb{Z}$

$k \in \{4\}$

при $k=4$ $x_1 = 4\pi$

$\frac{19\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} + \pi m \le \frac{9\pi}{2} \quad |:\pi$

$\frac{19}{6} - \frac{1}{6} \le m \le \frac{27}{6} - \frac{1}{6}$

$\frac{18}{6} \le m \le \frac{26}{6}$, так как $m \in \mathbb{Z}$

$m \in \{3;4\}$

при $m_1 = 3$ $x_2 = \frac{\pi}{6} + 3\pi$,

при $m_2 = 4$ $x_3 = \frac{\pi}{6} + 4\pi$

$\frac{19\pi}{6} \le \frac{5\pi}{6} + \pi t \le \frac{9\pi}{2} \quad |:\pi$

$\frac{19}{6} - \frac{5}{6} \le t \le \frac{27}{6} - \frac{5}{6}$

$2\frac{2}{6} \le t \le 3\frac{4}{6}$, так как $t \in \mathbb{Z}$

$t \in \{3\}$

при $t=3$ $x_4 = \frac{5\pi}{6} + 3\pi$

Ответ: 4π; ~~$\frac{19\pi}{6}$~~; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.

Задачи с развернутым ответом

14 Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, в основании которой лежит треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды равна 4. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка M, а на продолжении ребра SB за точку B – точка N, причём $AM = BN = SA$.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости MNC.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Задачи с развернутым ответом

14 Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, в основании которой лежит треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды равна 4. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка M, а на продолжении ребра SB за точку B – точка N, причём $AM = BN = SA$.

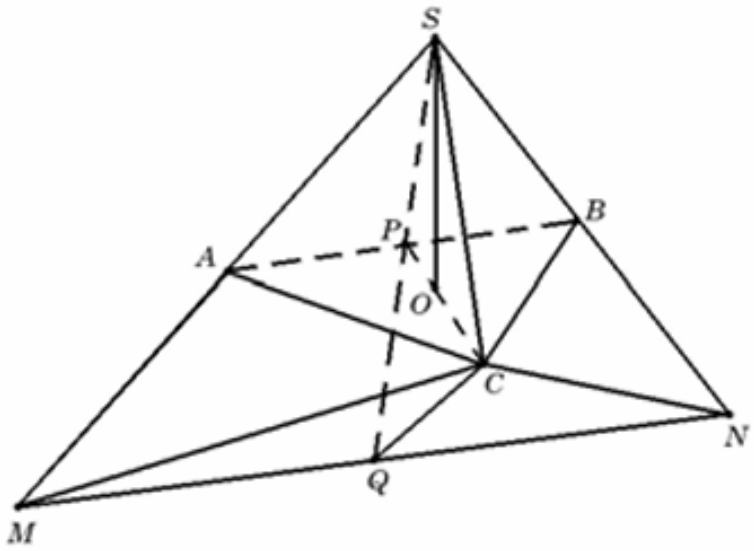
а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости MNC.

1)Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2) Теорема о трех перпендикулярах.
3) Метод координат.

Решение.

а) Пусть P — середина ребра AB, Q — середина отрезка MN. В равнобедренных треугольниках ASB и MSN медианы SP и SQ являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, P и Q лежат на одной прямой. Треугольник MCN равнобедренный, так как треугольники MAC и NBC равны, а значит, $MC = CN$. В треугольниках ABC и MCN высотами служат отрезки CP и CQ соответственно. Так как прямая MN перпендикулярна прямой SQ и прямой CQ, то прямая MN перпендикулярна плоскости SCQ. Следовательно, прямая MN перпендикулярна ребру SC.

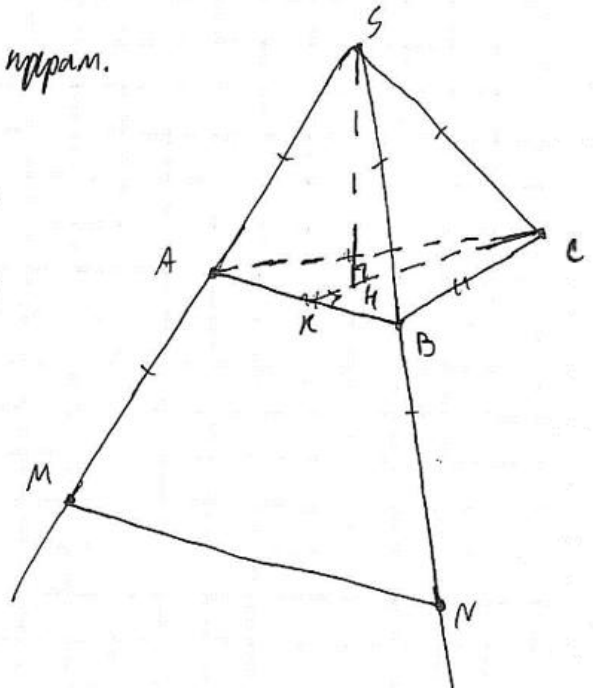


Задачи с развернутым ответом

Задание №14

1)

Дано:
SABC – прав. прам.
AB = 6
h = 4
AM = BN = SA
∢ = 75°
а) SC ⊥ MN
Найти
б)



а) 1) рассмотрим треуг. в MNS: AB – средн. линия (поскольку SA = AM, SB = BN) ⇒ AM ∥ MN

2) построим CK – высоту к AB
CK – высота, биссектр. и медиана в прав. треуг.

3) построим высоту SH, H лежит на CK ⇒
⇒ CH – это проекция SC на плоск. ABC

4) CH лежит на CK ⇒ если CK ⊥ AB, то CH ⊥ AB

5) MN ∥ AB ⇒ CH ⊥ MN

6) CH – проекция SC ⇒ SC ⊥ MN

Применение теоремы о трех перпендикулярах

Задачи с развернутым ответом

15 Решите неравенство $\dfrac{64}{8+\log_2 x \cdot \log_2 \dfrac{4}{x}} \le \log_2^2 x - \log_2 \dfrac{x^2}{256}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 1 и/или 16, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задачи с развернутым ответом

Задание №15

1)

$$\frac{64}{8+2\log_2 x-\log_2^3 x} \le \log_2^2 x-2\log_2 x+8 \; ; \text{ Пусть } \log_2 x=t$$

$$\frac{64}{8+2t-t^2} \le t^2-2t+8 \; ; \frac{64}{8+2t-t^2}-(t^2-2t+8)\le 0$$

$$\frac{64-(t^2-2t+8)(8+2t-t^2)}{8+2t-t^2}\le 0 \; ; \frac{64-(8t^2+2t^3-t^4-16t-4t^2+2t^3+64+16t-8t^2)}{8+2t-t^2}\le 0$$

Возможные преобразования

$$\frac{64-(-t^4+4t^3-4t^2+64)}{8+2t-t^2}\le 0 \; ; \frac{64+t^4-4t^3+4t^2-64}{8+2t-t^2}\le 0 \; ; \frac{t^4-4t^3+4t^2}{8+2t-t^2}\le 0$$

$$\frac{t^2(t^2-4t+4)}{8+2t-t^2}\le 0 \; ; \quad \frac{t^2(t-2)^2}{8+2t-t^2}\le 0$$

1) Рассмотрим $y=\frac{t^2(t-2)^2}{8+2t-t^2}$

Задачи с развернутым ответом

Задание №15

15 Решите неравенство $\dfrac{9}{3+\log_4 x\cdot\log_4\dfrac{16}{x}}\le\log_4^2 x-\log_4\dfrac{x^2}{64}$.

Пусть $t=\log_4 x$, тогда неравенство примет вид: $\dfrac{9}{3+t(2-t)}\le t^2-(2t-3)$;

Разность квадратов

$$\frac{9-\left(t^2-2t+3\right)\left(3+2t-t^2\right)}{3+2t-t^2}\le 0;\ \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{(t+1)(3-t)}\le 0;\ \frac{t^2(t-2)^2}{(t+1)(t-3)}\ge 0.$$

Откуда $t<-1;\ t=0;\ t=2;\ t>3$.

При $t<-1$ получим: $\log_4 x<-1$, откуда $0<x<\dfrac{1}{4}$.

При $t=0$ получим: $\log_4 x=0$, откуда $x=1$.

При $t=2$ получим: $\log_4 x=2$, откуда $x=16$.

При $t>3$ получим: $\log_4 x>3$, откуда $x>64$.

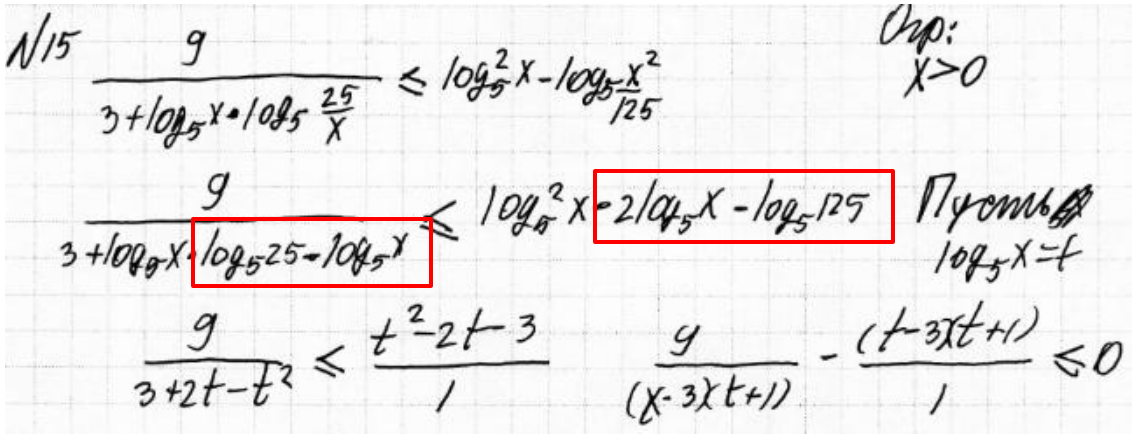
Решение исходного неравенства: $0<x<\dfrac{1}{4};\ x=1;\ x=16;\ x>64$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{4}\right);\ 1;\ 16;\ (64;+\infty)$.

Задачи с развернутым ответом

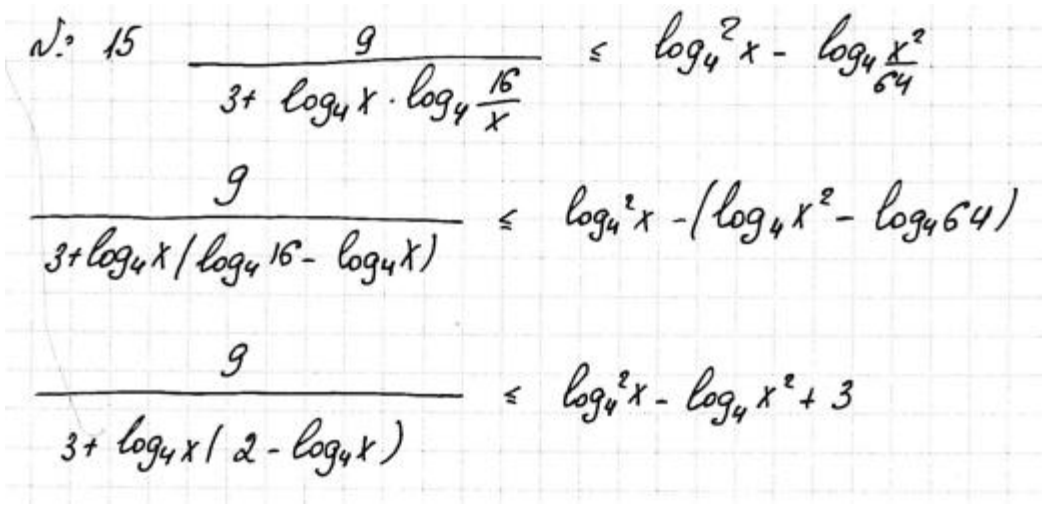
Задание №15

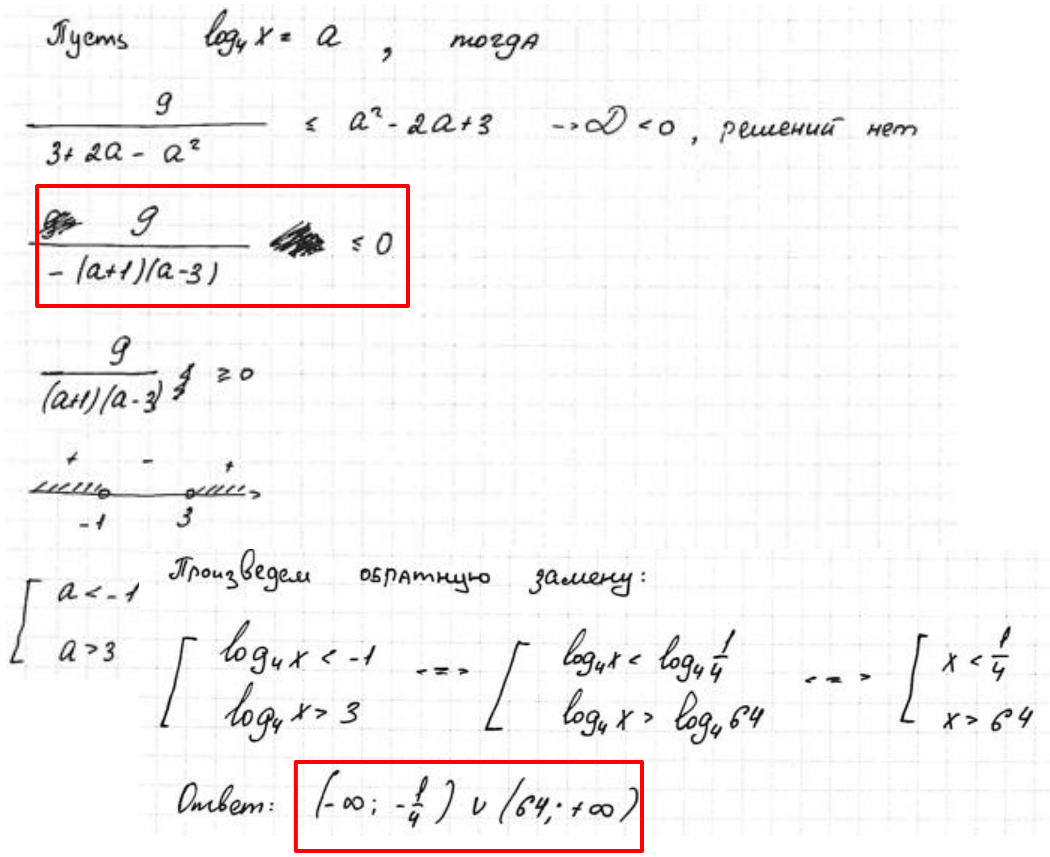
2)



Отсутствие скобок!

3)





Ответ: $\left(0;\frac{1}{4}\right]; 1; 16; (64;+\infty)$.

Задачи с развернутым ответом

Задание №15

Решите неравенство $\dfrac{64}{8+\log_2 x\cdot\log_2\dfrac{4}{x}}\le\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^2}{256}$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид: $\dfrac{64}{8+t(2-t)}\le t^2-(2t-8)$;

$$\frac{64-\left(t^2-2t+8\right)\left(8+2t-t^2\right)}{8+2t-t^2}\le 0;\ \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{(t+2)(4-t)}\le 0;\ \frac{t^2(t-2)^2}{(t+2)(t-4)}\ge 0.$$

Откуда $t<-2;\ t=0;\ t=2;\ t>4$.

При $t<-2$ получим: $\log_2 x<-2$, откуда $0<x<\dfrac{1}{4}$.

При $t=0$ получим: $\log_2 x=0$, откуда $x=1$.

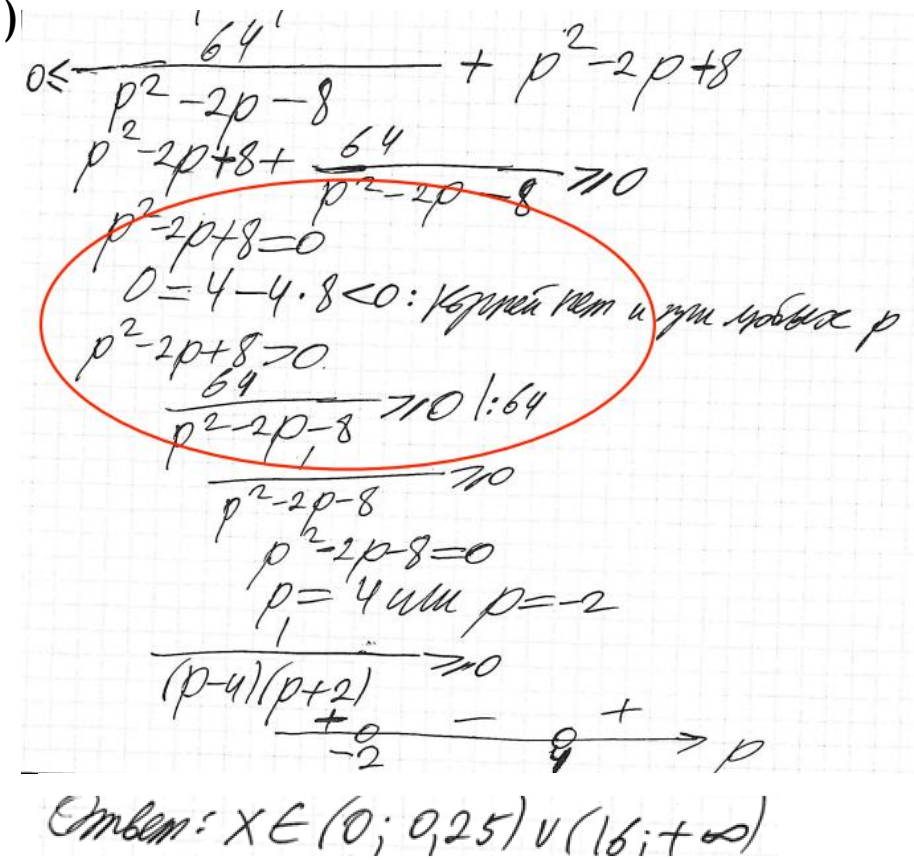
При $t=2$ получим: $\log_2 x=2$, откуда $x=4$.

При $t>4$ получим: $\log_2 x>4$, откуда $x>16$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\dfrac{1}{4};\ x=1;\ x=4;\ x>16$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{4}\right);\ 1;\ 4;\ (16;+\infty)$.

4)



Ответ: $x\in(0;0{,}25)\cup(16;+\infty)$

Задачи с развернутым ответом

Задание №15

Решите неравенство $\dfrac{9}{3+\log_4 x\cdot\log_4\dfrac{16}{x}}\le\log_4^2 x-\log_4\dfrac{x^2}{64}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, тогда неравенство примет вид: $\dfrac{9}{3+t(2-t)}\le t^2-(2t-3)$;

$$\frac{9-\left(t^2-2t+3\right)\left(3+2t-t^2\right)}{3+2t-t^2}\le 0;\ \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{(t+1)(3-t)}\le 0;\ \frac{t^2(t-2)^2}{(t+1)(t-3)}\ge 0.$$

Откуда $t<-1;\ t=0;\ t=2;\ t>3$.

При $t<-1$ получим: $\log_4 x<-1$, откуда $0<x<\dfrac{1}{4}$.

При $t=0$ получим: $\log_4 x=0$, откуда $x=1$.

При $t=2$ получим: $\log_4 x=2$, откуда $x=16$.

При $t>3$ получим: $\log_4 x>3$, откуда $x>64$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\dfrac{1}{4};\ x=1;\ x=16;\ x>64$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{4}\right);\ 1;\ 16;\ (64;+\infty)$.

5)

$$\frac{9}{3+\log_4 x\cdot\log_4\frac{16}{x}}\le\log_4^2 x-\log_4\frac{x^2}{64}$$

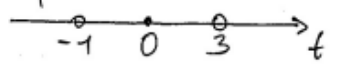
$$\frac{9}{3+\log_4 x(\log_4 16-\log_4 x)}\le\log_4^2 x-(2\log_4 x-\log_4 64)$$

пусть $\log_4 x=t$

$$\frac{9}{3+t(2-t)}\le t^2-(2t-3)$$

$$\frac{t^4-2t^3+3t^2+2t^3-6t+4t^2-3t^2+6t-9+9}{-t^2+2t+3}\le 0$$

$$\frac{t^4}{(t+1)(t-3)}\ge 0$$



$$\begin{cases} t<-1 \\ t=0 \\ t>3 \end{cases}$$ обратная замена $$\begin{cases} \log_4 x<-1 \\ \log_4 x=0 \\ \log_4 x>3 \end{cases}$$ $$\begin{cases} 0<x<\frac{1}{4} \\ x=1 \\ x>64 \end{cases}$$

Ответ: $(0;\frac{1}{4})\cup\{1\}\cup(64;+\infty)$

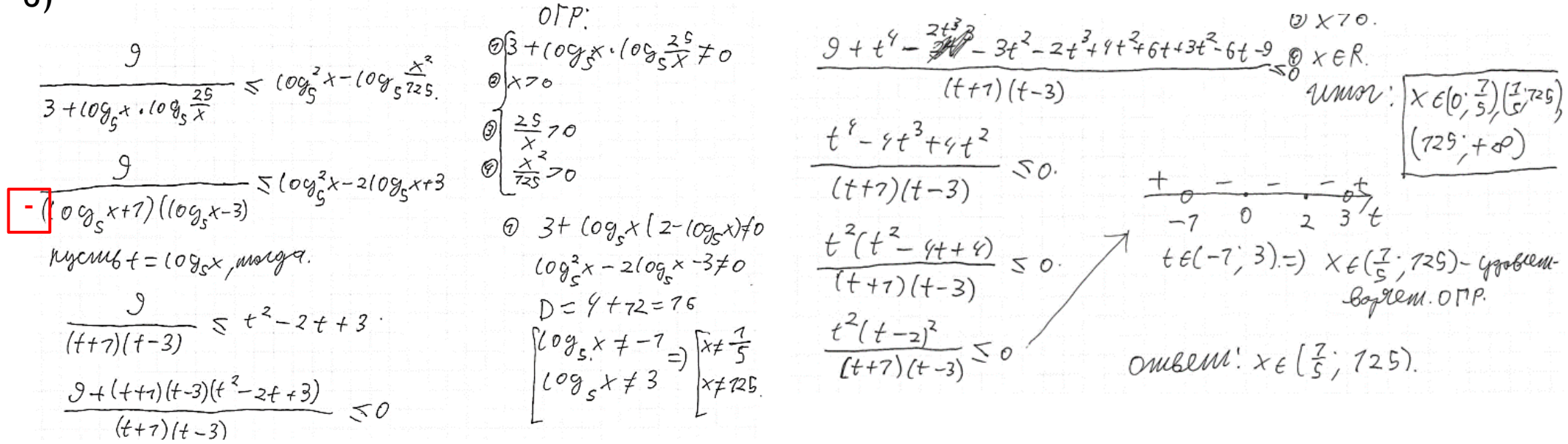
Задачи с развернутым ответом

Задание №15

Решите неравенство $\dfrac{9}{3+\log_5 x\cdot\log_5\dfrac{25}{x}}\le\log_5^2 x-\log_5\dfrac{x^2}{125}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{5}\right];\ 1;\ 25;\ (125;+\infty)$.

6)



Задачи с развернутым ответом

Задание №15

7)

$$\frac{9}{3+\log_4 x \log_4 \frac{16}{x}} \le \log_4^2 x - \log_4 \frac{x^2}{64}$$

$$\frac{9}{3+\log_4 x(2-\log_4 x)} \le \log_4 x - (2\log_4 x - 3)$$

пусть $\log_4 x = t$, тогда:

$$\frac{9}{3+t(2-t)} \le t^2 - (2t-3)$$

$$\frac{9}{3-t^2+2t} \le t^2 - 2t + 3 \quad | \cdot 3 - t^2 + 2t$$

Знаменатель может принимать как положительные, так и отрицательные значения

$$9 \le (t^2 - 2t + 3)\cdot(-t^2 + 2t + 3)$$

$$9 \le -t^4 + 2t^3 - 3t^2 + 2t^3 - 4t^2 + 6t + 3t^2 - 6t + 9$$

$$-t^4 + 4t^3 - 4t^2 \ge 0$$

Задачи с развернутым ответом

16 В июле 2026 г. планируется взять кредит на пять лет в размере 470 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 40 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 и 2031 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 г. долг будет выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 986 тыс. рублей. Сколько рублей составит платеж в 2031 году?

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задачи с развернутым ответом

Задание №16

1) $S = 470$ тыс
$r = 40\% = 0{,}4$
$n = 5$ лет

x – равная доля долга в 2027, 2028 и 2029 гг.
y – равная доля долга в 2030 и 2031 гг.
общая сумма выплат – 986 тыс.

1) $3x + 2y = S$
$3x + 2y = 470$
$2y = 470 - 3x$
$y = \frac{470 - 3x}{2}$

N	ежегодный платёж
1/5	$S \cdot 0{,}4 + x$
2/4	$(S - x) \cdot 0{,}4 + x$
3/3	$(S - 2x) \cdot 0{,}4 + x$
4/2	$(S - 3x) \cdot 0{,}4 + x$
5/1	$(S - 3x - y) \cdot 0{,}4 + y$

} 986 тыс.

2) $0{,}4(5S - 9x - y) + S = 986$

$2S - 3{,}6x - 0{,}4y = 986 - 470$
$2 \cdot 470 - 3{,}6x - 0{,}4y = 516$
$-3{,}6x - 0{,}4y = 516 - 940$
$-3{,}6x - 0{,}4y = -424 \quad | \cdot (-1)$
$3{,}6x + 0{,}4y = 424$
$3{,}6x + \frac{y(470 - 3x)}{10} \cdot 2 = 424$
$3{,}6x + \frac{470 - 3x}{5} = 424$
$\frac{18x + 470 - 3x}{5} = 424$
$\frac{15x + 470}{5} = 424$
$3x + 94 = 424$
$3x = 330$
$x = 110$ тыс.

3) $y = \frac{470 - 330}{2} = \frac{140}{2} = 70$ тыс.

4) $(470 - 330 - 70) \cdot 0{,}4 + 70 = 28 + 70 = 98$ тыс. платёж в 2031 г.

Ответ: 98 000

Задачи с развернутым ответом

Задание №16

16 В июле 2026 г. планируется взять кредит на пять лет в размере 470 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 40 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 и 2031 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 г. долг будет выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 986 тыс. рублей. Сколько рублей составит платеж в 2031 году?

Дата	Долг до выплаты	Долг после выплаты	Выплата
2026	-	S	-
2027	SK	$SK-x$	x
2028	SK^2-Kx	SK^2-Kx-x	x
2029	SK^3-K^2x-Kx	$SK^3-K^2x-Kx-x$	x
2030	$SK^4-K^3x-K^2x-Kx$	$SK^4-K^3x-K^2x-Kx-y$	y
2031	$SK^5-K^4x-K^3x-K^2x-Ky$	$SK^5-K^4x-K^3x-K^2x-Ky-y$	y

2) $S = 470$ тыс руб - сумма кредита

$n = 5$ - срок кредита

$K = 1{,}4$ - повышающий коэф $\quad K = \frac{r}{100} + 1$

$r = 40\%$

x - выплата в 2027, 2028, 2029 годах

y - выплата в 2030, 2031 годах

$$\begin{cases} SK^5 - K^4x - K^3x - K^2x - Ky - y = 0 \\ 3x + 2y = 986 \end{cases}$$

Задачи с развернутым ответом

17 Через вершину B прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, которая перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M так, что $MB = MD$.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$.

б) Найдите площадь треугольника OCM, если $BC = 3\sqrt{30}$, O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

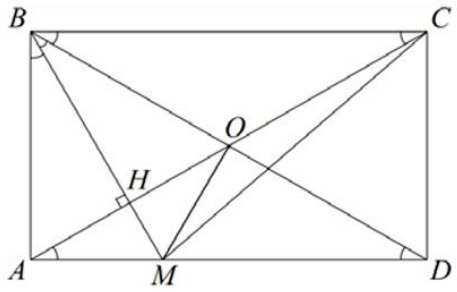
Задачи с развернутым ответом

Задание №17

17 Через вершину B прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, которая перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M так, что $MB = MD$.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$.

б) Найдите площадь треугольника OCM, если $BC = 3\sqrt{30}$, O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.



б) Так как $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90^0 = 30^0$, то

$$AB = BC \cdot \operatorname{tg} 30^0 = \frac{3\sqrt{30}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{10};\ CD = AB = 3\sqrt{10};$$

$$AM = AB \cdot \operatorname{tg} 30^0 = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \sqrt{30}.$$

Поскольку точка O – середина AC, получаем:

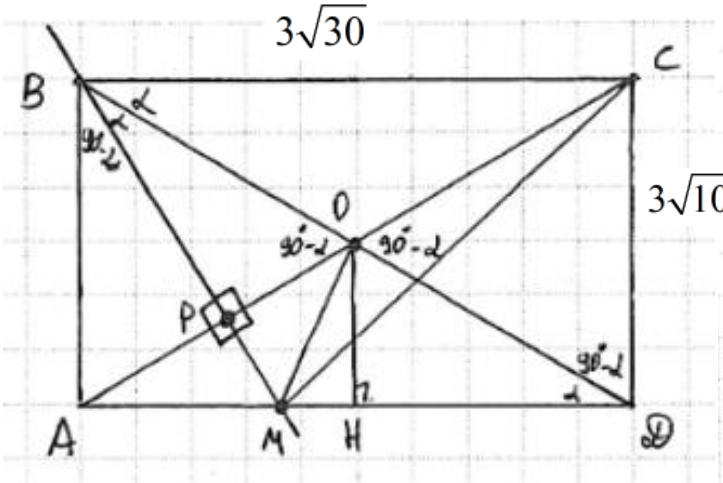
$$S_{OCM} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{4} AM \cdot CD = \frac{1}{4} \sqrt{30} \cdot 3\sqrt{10} = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

Задачи с развернутым ответом

Задание №17

1)



а) $BC = 3\sqrt{30}$. В $\triangle BCD$: $\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow CD = BC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{30} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{10}$. Т.к. $ABCD$ – прямоугольник, то $AB = CD = 3\sqrt{10}$. В $\triangle ABM$: $\frac{AM}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow AM = AB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{30}$

$S_{\triangle ACM} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle OCM} \Rightarrow S_{\triangle OCM} = S_{\triangle ACM} - S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} AM\left(CD - \frac{1}{2} CD\right) = \frac{1}{4} AM \cdot CD$

$3\sqrt{30} \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot CD$

Опустим $OH \perp AD$. $S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot OH = \frac{1}{4} AM \cdot CD$. Т.к. $ABCD$ – прямоугольник, то $OH = \frac{1}{2} CD$

$S_{\triangle OCM} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{30} \cdot 3\sqrt{30} = \frac{3 \cdot 30}{4} = \frac{45}{2} = 22{,}5$

Ответ: 22,5.

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

Задачи с развернутым ответом

Задание №17

Через вершину B прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, которая перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M так, что $MB = MD$.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$.

б) Найдите площадь треугольника OCM, если $BC = 9\sqrt{15}$, O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Решение.

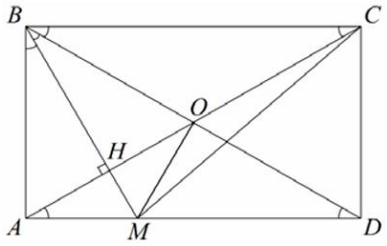
б) Так как $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3}\cdot 90^0 = 30^0$, то

$$AB = BC\cdot \operatorname{tg}30^0 = \frac{9\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{5};\ CD = AB = 9\sqrt{5};\ AM = AB\cdot \operatorname{tg}30^0 = \frac{9\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{15}.$$

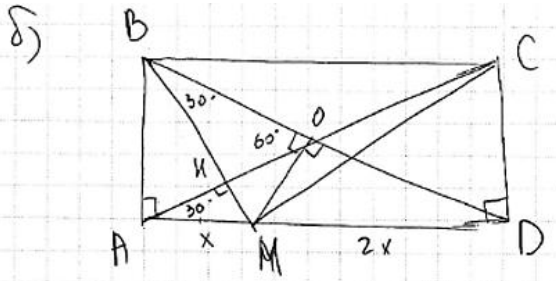
Поскольку точка O – середина AC, получаем:

$$S_{OCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{4}AM\cdot CD = \frac{1}{4}3\sqrt{15}\cdot 9\sqrt{5} = \frac{135\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{135\sqrt{3}}{4}$.



2)



$\angle ABM + \angle CBD + \angle MBD = 90°$

$\Rightarrow \alpha = 30°$

Пусть $AK = x \Rightarrow BM = 2x$ (лежит против $\angle 30°$)

т.к. $MD = 2x$, т.к. $MD = BM$

$AD = AM + MD = 3x = BC \Rightarrow x = \frac{9\sqrt{15}}{3} = 3\sqrt{15}$, т.к. BK – мед. и выс., то M точка мед. и выс. $\Rightarrow \triangle AMO$ – р/б, $\Rightarrow AM = MO = x$, $\angle OAM = \angle AOM = \alpha = 30°$, т.к. $\angle BOM = \angle ADM + \angle BOM = 30° + 60° = 90°$, $\angle COD = \angle AOB = 60°$ (верт.)

т.к. $\angle MOC = 90° + 60° = 150°$, $OC = \frac{1}{2}AC$, $AC = \frac{3x}{\cos 30°} = 2\sqrt{3}x$ в $\triangle ADC$ – п/у

$OC = \sqrt{3}x \Rightarrow S_{MOC} = \frac{1}{2}OM\cdot OC\cdot \sin\angle MOC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x\cdot x\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 81\cdot 15 = \frac{1215\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $S_{MOC} = \frac{1215\sqrt{3}}{4}$

Задачи с развернутым ответом

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1 - (x-2)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = -1$ и/или исключением точки $a = -\frac{1}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-1; -\frac{1}{3}\right]$ множества значений a, возможно, с включением/исключением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию числа корней уравнения $(ax+1)^2 = 1 - (x-2)^2$ при условии $ax + 1 \leqslant 0$ ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой $y = ax$ и полуокружности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задачи с развернутым ответом

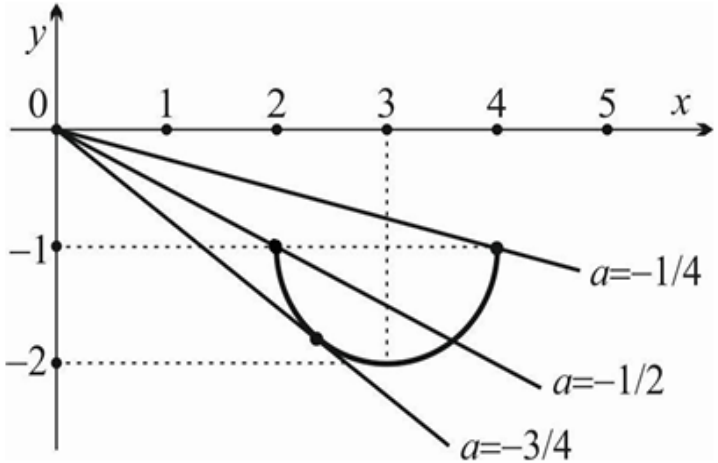
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1 - (x-3)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое из них — прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе — нижняя дуга окружности с центром $(3; -1)$ и радиусом 1, как на рисунке.



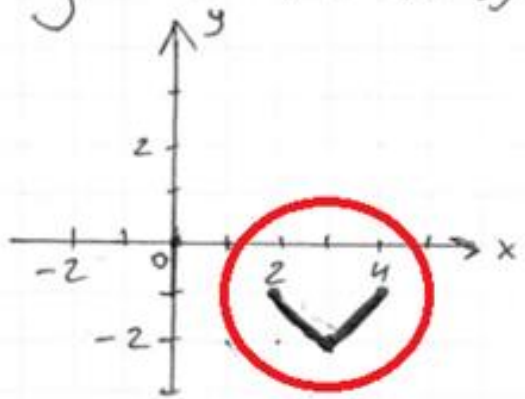
Задачи с развернутым ответом

Задание №18

1)

Построим график для

$y = -1 - \sqrt{1-(x-3)^2}$



3) Чтобы у двух графиков была одна общая точка, необходимо, чтобы параметр "а" был отрицателен (график $y=ax$ будет убывающий). Тогда, чтобы не было пересечения в двух точках, нужно подставить значение границы "х". $\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ и $a = -\frac{1}{4}$. При этом, если значение $a = -\frac{1}{2}$, то точек пересечения бесконечное кол-во.

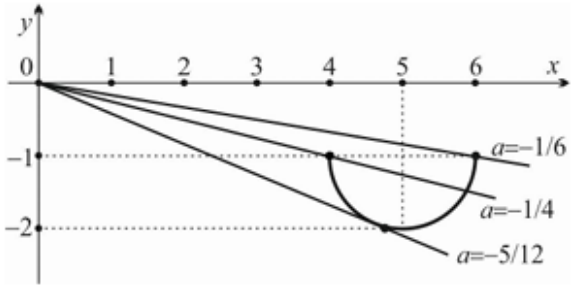
Задачи с развернутым ответом

Задание №18

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1 - (x-5)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

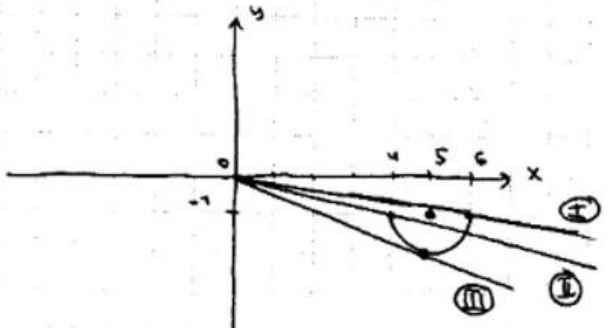


Найдем координату точки касания прямой и окружности, подставив в уравнение окружности $y = ax$. После переноса слагаемого и возведения в квадрат получим $(ax+1)^2 = 1-(x-5)^2$, это уравнение должно иметь единственное решение, $(a^2+1)\cdot x^2 + 2\cdot(a-5)\cdot x + 25 = 0$, требуем $\frac{D}{4} = 0$, $(a-5)^2 - 25\cdot(a^2+1) = 0$, откуда $a\cdot(a+\frac{5}{12}) = 0$. При $a = 0$ имеется горизонтальное касание с верхней частью окружности, которое нам не подходит. При этом $a = -\frac{5}{12}$ — в ответ, соответствует наклонному касанию. Будем поворачивать прямую против часовой стрелки от точки последнего касания. Если прямая пройдет через левую граничную точку дуги окружности $(4;-1)$, то решений еще два, этому положению соответствует $a = -\frac{1}{4}$, равное тангенсу угла наклона прямой, оно получается делением второй координаты на первую. Найденное a в ответ еще не включается. Продолжим поворот, одно пересечение будет до тех пор, пока прямая не пройдет через точку $(6;-1)$, где $a = -\frac{1}{6}$, откуда $a \in \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$ — в ответ.

Ответ: $a \in \left\{-\frac{5}{12}\right\} \cup \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$.

2)

Окружность с центром (5;-1); R=1



(I) Прямая из пучка проходит т/з точку (6;-1) => 1 решение:
$-1 = a\cdot 6$; $a = -\frac{1}{6}$.

(II) Прямая из пучка проходит т/з точку (4;-1) => 2 решения
$-1 = a\cdot 4$; $a = -\frac{1}{4}$;

(III) Прямая из пучка касается окружности => => 1 решение:

$(x-5)^2 + (ax+1)^2 = 1$

$x^2 - 10x + 25 + a^2x^2 + 2ax + 1 = 1$

$x^2(a^2+1) + x(2a-10) + 25 = 0$

$D = 4a^2 - 40a + 100 - 100a^2 - 100 = 0$

$-96a^2 - 40a = 0$

$12a^2 + 5a = 0$

$a(12a+5) = 0$

$a = 0$ (посторонний) или $a = -\frac{5}{12}$

=> Подходят случаи: $[I; II) \cup \{III\}$ Ответ: $a \in \left\{-\frac{5}{12}\right\} \cup \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$.

Задачи с развернутым ответом

Задание №18

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

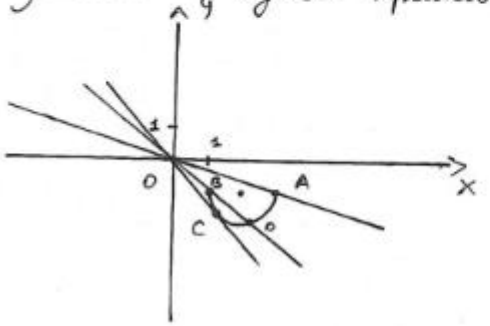
Ответ: $a \in \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right]$.

3)

$\begin{cases} y = ax \\ y = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \end{cases}$ Имеет 1 решение

$y = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2}$ – полуокружность $O(2;-1)$, $R=1$

$y = ax$ – пучок прямых из $(0;0)$



$y = ax$ имеет одно пересечение с полуокружностью если:

1) Она является касательной к ней (точка C)

2) Пересекает ее между точками A и P.

1) Найдем точку касания. $y = ax \Rightarrow ax - 1y + 0 = 0$

$x_0 = 2$; $y_0 = -1$; $R = 1$. Расстояние между прямой и центром равно R (условие касания)

$d = \frac{|a \cdot 2 + 1 + 0|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$; $\frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$; $\frac{(2a+1)^2}{a^2+1} = 1$

$4a^2 + 4a + 1 = a^2 + 1$; $3a^2 + 4a = 0$; $a(3a+4) = 0$; $a = 0$, $a = -\frac{4}{3}$

$a = 0$: $y = 0x$; $y = 0$ / $0 = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2}$; $\sqrt{1-(x-2)^2} = -1$ — $a = -\frac{4}{3}$

Получилось что корень равен отрицательному числу $\Rightarrow a = 0$ — посторонний

A и B "граничные" точки полуокружности $\therefore A(3;-1)$; $B(1;-1)$

Найдем пересечение ax с ними. При пересечении B, ax пересекает и точку P. Значит, полученное а нужно исключить из промежутка

$\begin{bmatrix} -1 = 3a \\ -1 = 1a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a = -\frac{1}{3} \\ a = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow a \in \left[-\frac{1}{3}; -1\right)$

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{3}; -1\right) \cup \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

Задачи с развернутым ответом

Задание №18

4)

(1) $y = ax$ – это пучок прямых, проходящих через точку (0;0) и $k_{нак} = a$

(2) $y = -1 - \sqrt{1-(x-3)^2}$

Полуокружность, у которой ограничение по x: $x \in (2;4)$.

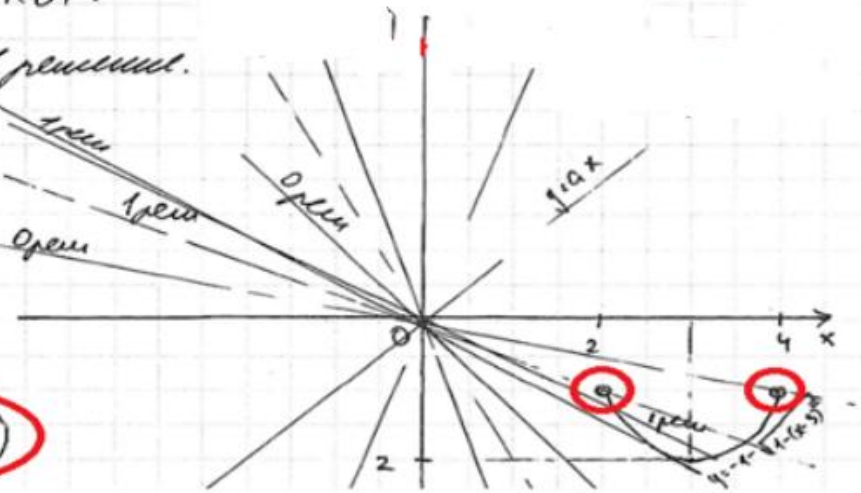
Точка минимума: (3;-2). Граничные точки (не включённые в D(y)): (2;-1) и (4;-1).

Изобразим графики в системе XOY:

Рассмотрим случаи, когда у нас будет 1 решение.

1) От точки (4;-1) до пересечения прямой точки (2;-1) у нас 1 решение.

После этого случая, у нас исключительно 2 решения.



Тогда: $-1 = a \cdot 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

$-1 = a \cdot 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$a \in \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$

Ответ: $a \in \left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.

Задачи с развернутым ответом

19 Лось Локос, маскот волейбольного клуба «Локомотив–Новосибирск», и Снеговик, талисман хоккейного клуба «Сибирь» (Новосибирская область), на празднике «День Болельщика» играют в числа. Локос записывает на доске n-значное натуральное число, не используя цифру 0. Затем Снеговик записывает рядом ещё одно число, полученное из исходного перемещением первой цифры на последнее место. (Например, если $n = 3$ и исходное число равно 123, то второе число равно 231.) После этого Локос находит сумму этих двух чисел.

а) Может ли сумма чисел на доске равняться 3456, если $n = 4$?

б) Может ли сумма чисел на доске равняться 107537, если $n = 5$?

в) При $n = 6$ оказалось, что сумма чисел делится на 99. Сколько натуральных чисел от 925111 до 925999, которые Локос мог использовать в качестве исходного числа?

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задачи с развернутым ответом

19 Лось Локос, маскот волейбольного клуба «Локомотив–Новосибирск», и Снеговик, талисман хоккейного клуба «Сибирь» (Новосибирская область), на празднике «День Болельщика» играют в числа. Локос записывает на доске n-значное натуральное число, не используя цифру 0. Затем Снеговик записывает рядом ещё одно число, полученное из исходного перемещением первой цифры на последнее место. (Например, если $n = 3$ и исходное число равно 123, то второе число равно 231.) После этого Локос находит сумму этих двух чисел.

а) Может ли сумма чисел на доске равняться 3456, если $n = 4$?

б) Может ли сумма чисел на доске равняться 107537, если $n = 5$?

в) При $n = 6$ оказалось, что сумма чисел делится на 99. Сколько натуральных чисел от 925111 до 925999, которые Локос мог использовать в качестве исходного числа?

Решение.

а) Нет, не может. Пусть $\overline{abcd}$ – исходное число. Тогда

$$\overline{abcd}+\overline{bcda}=1001a+1100b+110c+11d=11\cdot(91a+100b+10c+d),$$

но число 3456 не делится на 11.

Задачи с развернутым ответом

19 Лось Локос, маскот волейбольного клуба «Локомотив–Новосибирск», и Снеговик, талисман хоккейного клуба «Сибирь» (Новосибирская область), на празднике «День Болельщика» играют в числа. Локос записывает на доске n-значное натуральное число, не используя цифру 0. Затем Снеговик записывает рядом ещё одно число, полученное из исходного перемещением первой цифры на последнее место. (Например, если $n = 3$ и исходное число равно 123, то второе число равно 231.) После этого Локос находит сумму этих двух чисел.

а) Может ли сумма чисел на доске равняться 3456, если $n = 4$?

б) Может ли сумма чисел на доске равняться 107537, если $n = 5$?

в) При $n = 6$ оказалось, что сумма чисел делится на 99. Сколько натуральных чисел от 925111 до 925999, которые Локос мог использовать в качестве исходного числа?

Решение.

б) Да, может. Пусть $\overline{abcde}$ – исходное число. Тогда

$$\overline{abcde} + \overline{bcdea} = 10001a + 11000b + 1100c + 110d + 11e =$$
$$= 11 \cdot (909a + 1000b + 100c + 10d + e) + 2a.$$

Остаток от деления этой суммы на 11 такой же, как остаток от деления $2a$ на 11. Так как $107573 = 11 \cdot 9776 + 1$, то остаток от деления $2a$ на 11 равен 1. Единственный возможный случай $2a = 12$, откуда $a = 6$.

При $a = 6$ получим $11 \cdot (909 \cdot 6 + 1000b + 100c + 10d + e) + 2 \cdot 6 =$

$$= 11 \cdot (5454 + \overline{bcde}) + 12 = 60006 + 11 \cdot \overline{bcde} = 107537.$$

Тогда $\overline{bcde} = (107537 - 60006) : 11 = 4321$, значит, $\overline{abcde} = 64321$ и $64321 + 43216 = 107537$.

Ответ: а) нет; б) да, например, 64321; в) 81.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!