

Особенности подготовки к государственной  
итоговой аттестации в 11 классах  
по учебному предмету «Математика»  
на основе анализа результатов  
предметной диагностической работы

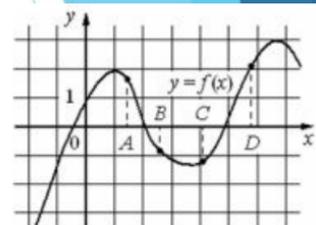
Новосибирск 2024

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Базовый уровень

## Функции и их графики

7. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на оси  $Ox$ . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке из левого столбца таблицы характеристики функции и её производной из правого столбца таблицы.



ТОЧКИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ
$A$	1) значение функции в точке отрицательно, и значение производной функции в точке отрицательно
$B$	2) значение функции в точке положительно, и значение производной функции в точке положительно
$C$	3) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
$D$	4) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

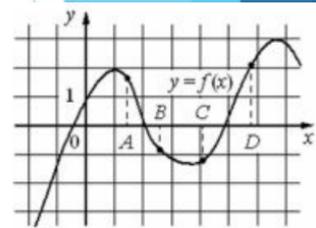
$A$	$B$	$C$	$D$

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Базовый уровень

## Функции и их графики

7. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на оси  $Ox$ . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке из левого столбца таблицы характеристики функции и её производной из правого столбца таблицы.



ТОЧКИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ
$A$	1) значение функции в точке отрицательно, и значение производной функции в точке отрицательно
$B$	2) значение функции в точке положительно, и значение производной функции в точке положительно
$C$	3) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
$D$	4) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

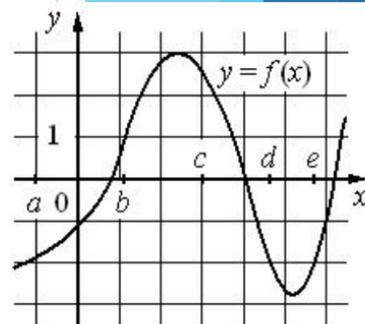
$A$	$B$	$C$	$D$
4	1	3	2

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Базовый уровень

## Функции и их графики

**7-1.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Точки  $a, b, c, d$  и  $e$  задают на оси  $Ox$  интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.



ИНТЕРВАЛЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ
А) $(a; b)$	1) значения производной функции положительны в каждой точке интервала
Б) $(b; c)$	2) значения функции отрицательны в каждой точке интервала
В) $(c; d)$	3) значения производной функции отрицательны в каждой точке интервала
Г) $(d; e)$	4) значения функции положительны в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

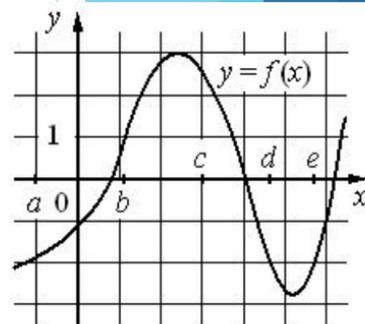
А	Б	В	Г

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Базовый уровень

### Функции и их графики

**7-1.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Точки  $a, b, c, d$  и  $e$  задают на оси  $Ox$  интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.



ИНТЕРВАЛЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ
А) $(a; b)$	1) значения производной функции положительны в каждой точке интервала
Б) $(b; c)$	2) значения функции отрицательны в каждой точке интервала
В) $(c; d)$	3) значения производной функции отрицательны в каждой точке интервала
Г) $(d; e)$	4) значения функции положительны в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г
1	4	3	2

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Базовый уровень**  
**Уравнения**

17. Решите уравнение  $\log_{3-x} 25 = 2$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Базовый уровень

### Уравнения

17. Решите уравнение  $\log_{3-x} 25 = 2$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

*Решение:* уравнение имеет смысл при одновременном выполнении двух условий  $3 - x > 0$  и  $3 - x \neq 1$ , откуда  $x < 3$  и  $x \neq 2$ . При найденных ограничениях уравнение равносильно  $(3 - x)^2 = 25$ , откуда  $3 - x = 5$  или  $3 - x = -5$ . Из двух найденных корней  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 8$ , последний является посторонним, так как  $x_2 > 3$ . Остается всего один корень  $x_1 = -2$ , его и следует записать в ответ.

Ответ:  $-2$ .

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Уравнения**

6. Найдите все корни уравнения  $\sqrt{(x-3)(4-3x)} + 3 = x$ .

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Уравнения

6. Найдите все корни уравнения  $\sqrt{(x-3)(4-3x)} + 3 = x$ .

*Решение:* уравнение равносильно  $\sqrt{(x-3)(4-3x)} = x-3$ . При  $x-3 \geq 0$  можно возвести его обе части в квадрат, получится равносильное уравнение (с теми же корнями, что и исходное). После возведения в квадрат, имеем новое уравнение  $(x-3)(4-3x) = (x-3)^2$ , откуда видно, что  $x=3$  — корень, удовлетворяющий всем условиям. При  $x \neq 3$  сократим обе части уравнения на  $x-3 \neq 0$ , получим  $4-3x = x-3$ ,  $4x = 7$ ,  $x = \frac{7}{4}$  — посторонний, не удовлетворяет условию  $x \geq 3$ . Остается всего один корень  $x=3$ , его и следует записать в ответ.

Ответ: 3.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Уравнения**

**6-1.** Найдите все корни уравнения  $\log_{16}(9 - 2x) = \log_4(x - 3)$ .  
Если корней несколько, то в ответ запишите их сумму.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Уравнения

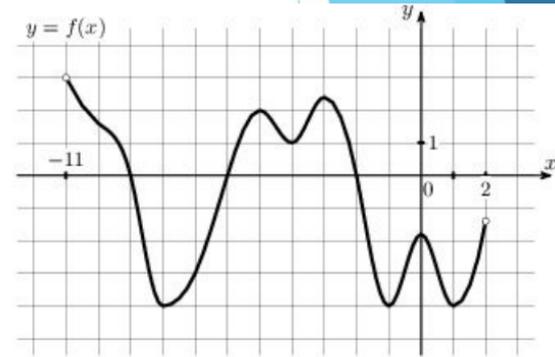
**6-1.** Найдите все корни уравнения  $\log_{16}(9 - 2x) = \log_4(x - 3)$ .  
Если корней несколько, то в ответ запишите их сумму.

*Решение:* уравнение имеет смысл при одновременном выполнении двух условий  $9 - 2x > 0$  и  $x - 3 > 0$ , откуда  $3 < x < \frac{9}{2}$ . Преобразуем исходное уравнение к виду  $\frac{1}{2} \log_4(9 - 2x) = \log_4(x - 3)$ ,  $\log_4(9 - 2x) = 2 \log_4(x - 3)$ . При найденных ограничениях  $3 < x < \frac{9}{2}$  исходное уравнение равносильно уравнению  $\log_4(9 - 2x) = \log_4(x - 3)^2$ , откуда, по свойствам логарифмов  $9 - 2x = (x - 3)^2$ ,  $9 - 2x = x^2 - 6x + 9$ ,  $x^2 - 4x = 0$ . Из двух найденных корней  $x_1 = 4$  и  $x_2 = 0$ , последний является посторонним. Остается всего один корень  $x_1 = 4$ , его и следует записать в ответ.

Ответ: 4.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Функции и их графики

8. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  определенной на интервале  $(-11; 2)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -\sqrt{2\pi}$ .

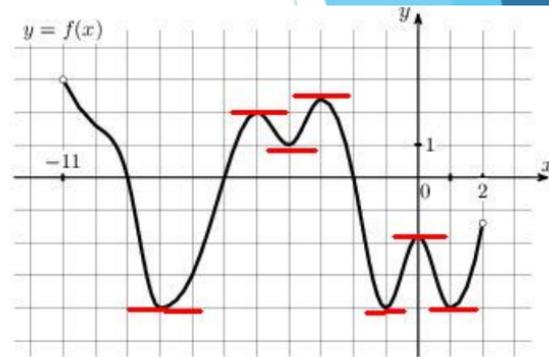


## Задачи, вызвавшие затруднения

### Профильный уровень

### Функции и их графики

8. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  определенной на интервале  $(-11; 2)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -\sqrt{2\pi}$ .



*Решение:* касательная к графику функции, параллельная прямой  $y = -\sqrt{2\pi}$ , имеет нулевой угол наклона к оси  $Ox$ , следовательно, в задаче речь идет о числе различных горизонтальных касательных к графику данной функции. Таких различных горизонтальных касательных у данной функции 7 — в точках максимума или минимума.

Ответ: 7.

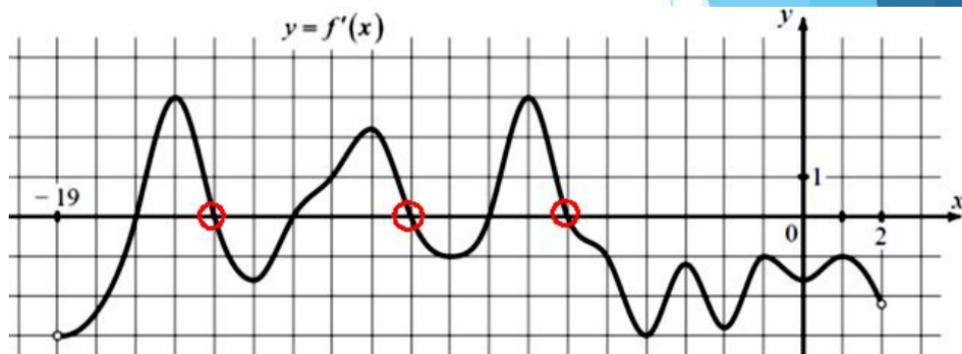


## Задачи, вызвавшие затруднения

### Профильный уровень

### Функции и их графики

8-1. На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-19; 2)$ . Определите количество точек максимума функции  $y = f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-16; 0]$ .



*Решение:* число точек максимума функции  $y = f(x)$  равно числу точек, в которых производная этой функции  $y = f'(x)$  меняет свой знак с «+» на «-». Таких точек ровно 3.

Ответ: 3.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства**

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2} + 1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2} + 1}$ .

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Профильный уровень

### Неравенства

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2} + 1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2} + 1}$ .

*Решение:* неравенство равносильно  $\frac{40}{(3^{2-x^2} + 1)^2} - \frac{34}{3^{2-x^2} + 1} + 3 \geq 0$ .

Замена  $3^{2-x^2} + 1 = t, t > 1$ . Имеем  $\frac{40}{t^2} - \frac{34}{t} + 3 \geq 0, \frac{3t^2 - 34t + 40}{t^2} \geq 0$ .

При  $t > 1$  неравенство равносильно  $3t^2 - 34t + 40 \geq 0$ ,  
откуда  $3\left(t - \frac{4}{3}\right)(t - 10) \geq 0$ , окончательно,  $t \leq \frac{4}{3}$  или  $t \geq 10$ .

Обратная замена  $3^{2-x^2} + 1 \leq \frac{4}{3}$  или  $3^{2-x^2} + 1 \geq 10$ , откуда  $3^{2-x^2} \leq \frac{1}{3}$  или  $3^{2-x^2} \geq 9, 3^{2-x^2} \leq 3^{-1}$  или  $3^{2-x^2} \geq 3^2, 2 - x^2 \leq -1$  или  $2 - x^2 \geq 2, x^2 \geq 3$  или  $x^2 \leq 0$ . Соответственно,  $x \leq -\sqrt{3}$ , или  $x \geq \sqrt{3}$ , или  $x = 0$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ .

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства**

**15-1.** Решите неравенство  $\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}$ .

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Неравенства

**15-1.** Решите неравенство  $\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}$ .

*Решение:* неравенство равносильно

$$\frac{\log_3 81 + \log_3 x}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3 81 + \log_3 x} \geq \frac{24 - 8 \log_3 x}{(\log_3 x - 4)(\log_3 x + 4)}. \text{ Замена } \log_3 x = t.$$

$$\text{Имеем } \frac{4+t}{t-4} + \frac{t-4}{4+t} \geq \frac{24-8t}{(t-4)(t+4)} \Leftrightarrow \frac{(t+4)^2 + (t-4)^2}{(t-4)(t+4)} - \frac{24-8t}{(t-4)(t+4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t+2)^2}{(t-4)(t+4)} \geq 0, \text{ откуда } t < -4, \text{ или } t = -2, \text{ или } t > 4.$$

Обратная замена  $\log_3 x < -4$ , или  $\log_3 x = -2$ , или  $\log_3 x > 4$ ,  
откуда  $0 < x < \frac{1}{81}$ , или  $x = \frac{1}{9}$ , или  $x > 81$ .

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{81}\right) \cup \left\{\frac{1}{9}\right\} \cup (81; +\infty)$ .

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства, критерии оценивания**

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2}+1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2}+1}$ .

15-1. Решите неравенство  $\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}$ .

Задача 15

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением изолированной точки, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл.	2

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства, типичные ошибки**

**Арифметическая (вычислительная) ошибка  
может быть только одна на задание,**

она возникает, когда выполняется одно из четырех действий арифметики — сложение, умножение, вычитание, деление. Из записи должно быть понятно, с какими числами и какая операция проводится, а также должен быть виден неверный результат такой операции.

Например,  $3+2=6$  — арифметическая ошибка,  
 $2(x+2)=2x+2$  — не вычислительная ошибка,  
 $2^4=8$  — не вычислительная ошибка,  
 $\sqrt{64}=4$  — не вычислительная ошибка.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства, типичные ошибки**

**Неравносильные преобразования**

возникают, когда выполняется действия, ведущие к потере решений, либо к приобретению посторонних решений.

Например,

- умножение обеих частей неравенства на выражение, знак которого может меняться,
- извлечение квадратного корня из полного квадрата без знака модуля,
- переход от логарифма произведения к сумме логарифмов множителей без учета их знаков,
- логарифмирование или потенцирование обеих частей неравенства без учета сравнения основания логарифма или степени с единицей.

Такие действия, даже при правильном ответе, оцениваются в 0 баллов. В таких случаях правильный ответ не является обоснованным.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства, типичные ошибки**

## **Неверные операции с множествами решений**

возникают, когда промежуточные неравенства решены верно, но операции пересечения или объединения решений выполнены неверно.

Например,

- вместо пересечения решений применяется их объединение,
- вместо объединения решений применяется их пересечение,
- операции применяются произвольным образом,
- неверно находится ОДЗ.

Такие действия, даже при правильном ответе, оцениваются в 0 баллов (подпадают под все остальные случаи).

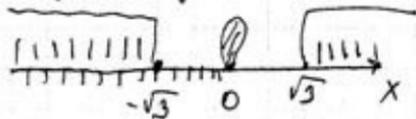
В таких случаях правильный ответ не является обоснованным.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Неравенства, примеры работ

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2}+1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2}+1}$ .

$$\begin{cases} 3^{2-x^2} > -1 \\ 3^{2-x^2} \leq \frac{1}{3} \\ 3^{2-x^2} \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 2-x^2 \leq -1 \Rightarrow \\ 2x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Объединим решения:



$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \cup \{0\}.$$

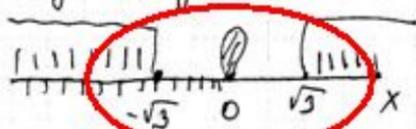
Ответ:  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \cup \{0\}$ .

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Неравенства, примеры работ**

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2}+1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2}+1}$ .

$$\begin{cases} 3^{2-x^2} > -1 \\ 3^{2-x^2} \leq \frac{1}{3} \\ 3^{2-x^2} \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 2-x^2 \leq -1 \Rightarrow \\ 2x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Объединим решения:



$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \cup \{0\}$$

Ответ:  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \cup \{0\}$ .

**0 баллов**

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Неравенства, примеры работ

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2}+1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2}+1}$ .

$$t_1 = \frac{34+26}{2 \cdot 3} = 10$$

$$t_2 = \frac{34-26}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$1) 3^{2-x^2} + 1 = 10 \quad 2) 3^{2-x^2} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$3^{2-x^2} = 9 \quad 3^{2-x^2} = \frac{1}{3}$$

$$2-x^2 = 2 \quad 2-x^2 = -1$$

$$-x^2 = 2-2 \quad -x^2 = -3$$

$$x^2 = 0 \quad x^2 = 3$$

$$x = 0 \quad x = \pm \sqrt{3}$$

$\begin{array}{ccccccc} + & - & 0 & - & + & & 1 \\ & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & & & \end{array}$

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ .

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Неравенства, примеры работ

15. Решите неравенство  $\frac{40}{(3^{2-x^2}+1)^2} + 3 \geq \frac{34}{3^{2-x^2}+1}$ .

Handwritten solution on grid paper:

$$t_1 = \frac{34+26}{2 \cdot 3} = 10$$

$$t_2 = \frac{34-26}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

1)  $3^{2-x^2} + 1 = 10$       2)  $3^{2-x^2} + 1 = \frac{4}{3}$

$$3^{2-x^2} = 9$$

$$3^{2-x^2} = \frac{1}{3}$$

$$2-x^2 = 2$$

$$2-x^2 = -1$$

$$-x^2 = 2-2$$

$$-x^2 = -3$$

$$x^2 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = 0$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

Sign chart:  $\begin{matrix} + & - & - & + \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & \end{matrix}$  **1 балл**

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ .

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Задачи с экономическим содержанием**

**16.** Иван 1 февраля взял в банке кредит под 10 % годовых. Схема возврата кредита следующая: 31 января каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Иван переводит в банк 665500 руб. Какой должна быть сумма кредита, чтобы Иван выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Задачи с экономическим содержанием

**16.** Иван 1 февраля взял в банке кредит под 10 % годовых. Схема возврата кредита следующая: 31 января каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Иван переводит в банк 665500 руб. Какой должна быть сумма кредита, чтобы Иван выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

*Решение:* пусть  $S$  — сумма кредита (основного долга);  $S_1, S_2, S_3$  — остатки основного долга после соответственно, первой, второй и третьей выплат;  $a$  — годовой процент;  $b = 1 + 0,01 \cdot a$  — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами;  $X$  — платеж. После 1-й выплаты сумма оставшегося долга  $S_1 = S \cdot b - X$ .

После 2-й —  $S_2 = S_1 \cdot b - X = (S \cdot b - X) \cdot b - X = S \cdot b^2 - (1 + b) \cdot X$ .

После 3-й —  $S_3 = S_2 \cdot b - X = S \cdot b^3 - (1 + b + b^2) \cdot X = S \cdot b^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X$ .

По условию тремя выплатами Иван должен погасить кредит полностью, поэтому  $S \cdot b^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0$ , откуда  $S = \frac{b^3 - 1}{b^3 \cdot (b - 1)} \cdot X$ .

При  $X = 665500$  и  $a = 10$  имеем:  $b = 1,1$  и  $S = \frac{0,331}{1,331 \cdot 0,1} \cdot 665500 = 1655000$  руб.

Ответ: 1655000 руб.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Задачи с экономическим содержанием

**16.** Иван 1 февраля взял в банке кредит под 10 % годовых. Схема возврата кредита следующая: 31 января каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Иван переводит в банк 665500 руб. Какой должна быть сумма кредита, чтобы Иван выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

*Решение:* второй способ. Кредиту под 10 % годовых соответствует множитель  $b = 1,1$ . Последняя выплата в 665500 руб. состояла из оставшейся суммы долга и суммы начисленных процентов, таким образом, остаток долга на 31 января последнего года, до начисления суммы процентов, составлял  $665500 : 1,1 = 605000$  руб. Годом ранее, на 31 января, до начисления суммы процентов, остаток суммы долга составлял  $(605000 + 665500) : 1,1 = 1270500 : 1,1 = 1155000$  руб., а на 31 января, по окончании первого года, до начисления суммы процентов остаток суммы долга составлял  $(1155000 + 665500) : 1,1 = 1820500 : 1,1 = 1655000$  руб., что равно сумме, взятой в кредит.

**Ответ:** 1655000 руб.

Задачи, вызвавшие затруднения  
Профильный уровень  
Задачи с экономическим содержанием

**16-1.** Вклад в размере 100 тыс рублей планируется открыть на три года. В конце каждого года банк начисляет на остаток вклада 10 % и таким образом увеличивает размер вклада по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго и третьего годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  тыс рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наибольшее значение  $x$ , при котором банк за три года начислит вкладчику меньше 41 тыс рублей.

## Задачи, вызвавшие затруднения

### Профильный уровень

### Задачи с экономическим содержанием

**16-1.** Вклад в размере 100 тыс рублей планируется открыть на три года. В конце каждого года банк начисляет на остаток вклада 10 % и таким образом увеличивает размер вклада по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго и третьего годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  тыс рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наибольшее значение  $x$ , при котором банк за три года начислит вкладчику меньше 41 тыс рублей.

*Решение:* пусть  $S$  — начальная сумма вклада;  $S_1, S_2, S_3$  — суммы на счете вкладчика после соответственно, первого, второго и третьего начисления процентов;  $a$  — годовой процент;  $b = 1 + 0,01 \cdot a$  — коэффициент для начисления общей суммы вклада с процентами.

После 1-го начисления процентов сумма вклада  $S_1 = S \cdot b$ .

После 2-го начисления процентов сумма вклада с учетом его пополнения

$$S_2 = (S_1 + x) \cdot b = (S \cdot b + x) \cdot b = S \cdot b^2 + b \cdot x.$$

После 3-го начисления процентов сумма вклада с учетом его пополнения

$$S_3 = (S_2 + x) \cdot b = (S \cdot b^2 + b \cdot x + x) \cdot b = S \cdot b^3 + (b^2 + b) \cdot x.$$

Сумма начисленных процентов за три года равна разности между остатком на счете вкладчика и суммой начального вклада со всеми пополнениями вклада

$$S_3 - S - 2x = S \cdot b^3 + (b^2 + b) \cdot x - S - 2x = S \cdot (b^3 - 1) + (b^2 + b - 2) \cdot x.$$

По условию  $S \cdot (b^3 - 1) + (b^2 + b - 2) \cdot x < 41$ , откуда  $(b^2 + b - 2) \cdot x < 41 - S \cdot (b^3 - 1)$ .

При  $S = 100$  и  $a = 10$  имеем:  $b = 1,1$  и  $0,31 \cdot x < 41 - 100 \cdot (1,331 - 1)$ ,  $31 \cdot x < 4100 - 3310$ ,  $x < \frac{790}{31} = 25\frac{15}{31}$ .

Так как  $x$  — целое число, то  $x = 25$ .

Ответ: 25.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень

### Задачи с экономическим содержанием, критерии оценивания

**16-1.** Вклад в размере 100 тыс рублей планируется открыть на три года. В конце каждого года банк начисляет на остаток вклада 10 % и таким образом увеличивает размер вклада по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго и третьего годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  тыс рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наибольшее значение  $x$ , при котором банк за три года начислит вкладчику меньше 41 тыс рублей.

Задача 16	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл.	2

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень

### Задачи с экономическим содержанием, критерии оценивания

**16.** Иван 1 февраля взял в банке кредит под 10 % годовых. Схема возврата кредита следующая: 31 января каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Иван переводит в банк 665500 руб. Какой должна быть сумма кредита, чтобы Иван выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

Задача 16	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл.	2

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Задачи с экономическим содержанием, о моделях

Каждая текстовая задача представляет собой словесное описание некоторой ситуации с числовыми данными, общепринятыми умолчаниями и упрощениями, или кратко — некоторый сюжет. Этот сюжет надо перевести на математический язык и получить адекватно отражающую текстовое условие математическую задачу. Такая задача может быть представлена в виде уравнения (системы уравнений), или неравенства (системы неравенств), или функции (с ограничениями), которую надо исследовать, или цепочки арифметических вычислений и т. п. Кроме представления самой задачи, надо обязательно продвинуться в ее решении, ответ может быть не получен. Это и будет оцениваемой моделью на 1 балл. Для оценивания на полные 2 балла останется только решить эту полученную задачу до правильного ответа.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Экономика, типичные ошибки**

**Неверное составление модели**

- путают равномерное снижение долга и равные платежи по кредиту;
- начисляют проценты на всю сумму кредита, складывают с суммой, взятой в кредит, делят на число лет, либо начисляют проценты после выплат;
- угадывают ответ и доказывают, что он подходит, путем подстановки неизвестно откуда взятых числовых данных в условие задачи;
- игнорируют указание в условии на целое число миллионов;
- в задачах на вклады не вычитают дополнительные взносы из конечной суммы у вкладчика.

Такие ошибки ведут к оценке в 0 баллов за задачу.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

№16.

Пусть  $S$  рублей - сумма долга. Тогда:

$$((1,1S - 665500) \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 - 665500 = 0$$

$$S \cdot 1,1^3 - 665500 \cdot 1,1^2 = 665500 \cdot 1,1 - 665500 = 0$$

$$S = \frac{665500}{1,1} + \frac{665500}{1,1^2} + \frac{665500}{1,1^3} = 605000 + 550000 + 500000 =$$

$$= 1655000 \text{ рублей}$$

Ответ: сумма кредита равна 1655000 рублей.

**Задачи, вызвавшие затруднения**  
**Профильный уровень**  
**Экономика, примеры работ**

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
 Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

№16.

Пусть  $S$  рублей - сумма долга. Тогда:

$$((1,1S - 665500) \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 - 665500 = 0$$

$$S \cdot 1,1^3 - 665500 \cdot 1,1^2 = 665500 \cdot 1,1 - 665500 = 0$$

$$S = \frac{665500}{1,1} + \frac{665500}{1,1^2} + \frac{665500}{1,1^3} = 605000 + 550000 + 500000 =$$

$$= 1655000 \text{ рублей}$$

**2 балла**

Ответ: сумма кредита равна 1655000 рублей.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

$$\text{Должник} \text{ сумма кредита} = d, \text{ тогда к } n \text{ периодов} \text{ выплаты} \text{ сумма долга}$$

$$\text{станет } d + \frac{10d}{100}$$

$$1,1d - 665500 - \text{сумма после первой выплаты}$$

$$(1,1d - 665500) \cdot 1,1 - 665500 = \text{второй}$$
 и т.д. ИЛИ выплаты долг за 3 года:
 
$$((1,1d - 665500) \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 = 665500$$

$$(1,1^2 d - 665500 \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 = 665500$$

$$1,1^3 d - 665500 \cdot 1,1 = 665500$$

$$1,331d = 665500 \cdot 1,1 = 732050$$

$$1,331d = 592295$$

$$d = 445000 \quad \text{Ответ: } 445000$$

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

Допустим сумма кредита =  $d$ , тогда к  $n$  периоду выплаты сумма долга станет  $d + \frac{10d}{100}$

$1,1d - 665500$  - сумма после первой выплаты

$(1,1d - 665500) \cdot 1,1 - 665500 =$  второй

и т.д. Иная выплата долг за 3 года: **1 балл, модель есть**

$((1,1d - 665500) \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 = 665500$

$(1,1^2 d - 665500 \cdot 1,1 - 665500) \cdot 1,1 = 665500$  **неверные действия**

$1,1^3 d - 665500 \cdot 1,1 = 665500$

$1,331d = 665500 + 73205$

$1,331d = 592295$

$d = 445000$  **Ответ: 445000**

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.

Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

16)  $\&$   $100\% - 40\% = 60\%$   $665500 = 40\%$  (от всего долга)  
 $60\% + 10\%$  (от банка)  $= 70\%$  узнаем  $10\% = 665500 \cdot 10 : 40 =$   
 $70\% - 40\% = 30\%$   $= 166375 = 10\%$   
 $30\% + 10\% = 40\%$   $10\% \cdot 10\% = 100\%$   
 $40\% - 40\% = 0$  (кредит погашен)  $166375 + 166375 + 166375 + 166375 + 166375 +$   
 $+ 166375 + 166375 + 166375 + 166375 + 166375 =$   
 Ответ: Иван взял  $1655000$  (общий долг, который взял Иван)  $= 1653760$  (общий долг, который взял  
 от общего долга и вернул Иван)  
 все три года одинаковыми платежами.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.

Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

16)  $\&$   $100\% - 40\% = 60\%$   $665500 = 40\%$  (от всего долга)  
 $60\% + 10\%$  (от банка)  $= 70\%$  узнаем  $10\% = 665500 \cdot 10 : 40 =$   
 $70\% - 40\% = 30\%$   $= 166375 = 10\%$   
 $30\% + 10\% = 40\%$   $10\% \cdot 10\% = 100\%$   
 $40\% - 40\% = 0$  (кредит погашен)  $166375 + 166375 + 166375 + 166375 + 166375 +$   
 $+ 166375 + 166375 + 166375 + 166375 + 166375 =$   
**Ответ:** Иван взял  $1655000$  (общий долг, который взял Иван) **0 баллов, произвольная**  
 от общего долга и вернул **игра с процентами**  
 все тремя одинаковыми платежами.

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

№16 Пусть сумма кредита равна  $x$ , тогда

$$x$$

$$\downarrow$$

$$x - 665,5 \cdot 10^3$$

$$\downarrow$$

$$2 \left( 1,1 (x - 665,5 \cdot 10^3) \right)$$

$$\downarrow$$

$$1,1x - 665,5 \cdot 10^3 \cdot 1,1 - 665,5 \cdot 10^3 = 1,1x - 1397,55 \cdot 10^3$$

) 1-й год

6655	7321
+ 11	+ 665
6655	13971
6655	13975
11	110
73205	000000
+ 665,500	139755
2202,805	139755
	1537,305

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16. Кредит под 10 % на 3 года, равные платежи 665500 руб.  
Найти сумму кредита. **Ответ: 1655000 руб.**

№16 Пусть сумма кредита равна  $x$ , тогда

$x$   
↓  
 $x - 665,5 \cdot 10^3$

↓  
 $1,1(x - 665,5 \cdot 10^3)$

↓  
 $1,1x - 665,5 \cdot 10^3 \cdot 1,1 - 665,5 \cdot 10^3 = 1,1x - 1397,55 \cdot 10^3$

) 1-й год

6655	7321
+ 11	+ 665
-----	-----
6655	13971
6655	13975
-----	-----
11	73205
+ 110	+ 110
-----	-----
1537,305	000000
+ 665,500	139755
-----	-----
2202,805	139755
	-----
	1537,305

0 баллов, проценты  
после выплат

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16-1. Вклад 100000 руб. под 10 % на 3 года, с капитализацией, со 2-го года пополнения на целое  $x$  тыс. руб. Найти  $x$ , если банк начислит меньше 41 тыс. руб. **Ответ: 25.**

16. Начальная сумма вклада 100.000 р.

Первый год  $\frac{100.000 \cdot 10}{100} = 10.000$  р - на 10000 р пополнился за первый год.

1) При вкладе 25484 р на второй и третий год

Второй год 13548,4  $\frac{135484 \cdot 10}{100} = 13548,4$  - на эту сумму пополнился

Третий год 17451,64  $\frac{1745164 \cdot 10}{100} = 17451,64$  - сумма пополнения вклада

$$\begin{array}{r} 13548,4 \\ + 17451,64 \\ \hline 31000,04 \end{array}$$

Прибавляем первый год

$$\begin{array}{r} 31000,04 \\ + 10000,00 \\ \hline 41000,04 \end{array}$$

$$41000,04 > 41000$$

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16-1. Вклад 100000 руб. под 10 % на 3 года, с капитализацией, со 2-го года пополнения на целое  $x$  тыс. руб. Найти  $x$ , если банк начислит меньше 41 тыс. руб. **Ответ: 25.**

16. Начальная сумма вклада 100.000 р.

Первый год  $\frac{100.000 \cdot 10}{100} = 10.000$  р - на 10000 р пополнился за первый год.

1) При вкладе 25484 р на второй и третий год

Второй год 13548,4  $\frac{135484 \cdot 10}{100} = 13548,4$  - на эту сумму пополнился

Третий год 17451,64  $\frac{1745164 \cdot 10}{100} = 17451,64$  - сумма пополнения вклада

$$\begin{array}{r} 13548,4 \\ + 17451,64 \\ \hline 31000,04 \end{array}$$

1) угадайка

2) не целое число тысяч

Прибавляем первый год

$$\begin{array}{r} 31000,04 \\ + 10000,00 \\ \hline 41000,04 \end{array}$$

$$41000,04 > 41000$$

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16-1. Вклад 100000 руб. под 10 % на 3 года, с капитализацией, со 2-го года пополнения на целое  $x$  тыс. руб. Найти  $x$ , если банк начислит меньше 41 тыс. руб. **Ответ: 25.**

2) При вкладе 25 483 р. на второй и третий год

Второй год  $\frac{135483 \cdot 10}{100} = 13548,3$  р

~~Третий год  $\frac{174497,5 \cdot 10}{100} = 17449,75$~~

Третий год  $\frac{174514,3 \cdot 10}{100} = 17451,43$  р

$$\begin{array}{r} 13548,3 \\ + 17451,43 \\ \hline 30999,73 \end{array}$$

$30999,73 + 10000 = 40.999,73$  р - сумма пополнения  
вклада за 3 года.  
 $40999,73 < 41000$

Ответ: 25483

## Задачи, вызвавшие затруднения Профильный уровень Экономика, примеры работ

16-1. Вклад 100000 руб. под 10 % на 3 года, с капитализацией, со 2-го года пополнения на целое  $x$  тыс. руб. Найти  $x$ , если банк начислит меньше 41 тыс. руб. **Ответ: 25.**

2) При вкладе 25 483 р. на второй и третий год

Второй год  $\frac{135483 \cdot 10}{100} = 13548,3$  р

~~Третий год  $\frac{174497,5 \cdot 10}{100} = 17449,75$~~

Третий год  $\frac{174514,3 \cdot 10}{100} = 17451,43$  р

**0 баллов**

$$\begin{array}{r} 13548,3 \\ + 17451,43 \\ \hline 30999,73 \end{array}$$

$30999,73 + 10000 = 40.999,73$  р - сумма пополнения  
вклада за 3 года.  
 $40999,73 < 41000$

Ответ: 25483

Задачи, вызвавшие затруднения  
Профильный уровень  
Заключение

Благодарю за внимание!