

*Особенности преподавания учебного предмета
«Математика» в рамках подготовки к ГИА-11
в 2025 году*

*Подольн Елена Вячеславовна,
к.п.н., доцент кафедры инженерной
математики НГТУ , председатель
предметной комиссии Новосибирской
области*

Новосибирск 2024

Количество участников ЕГЭ

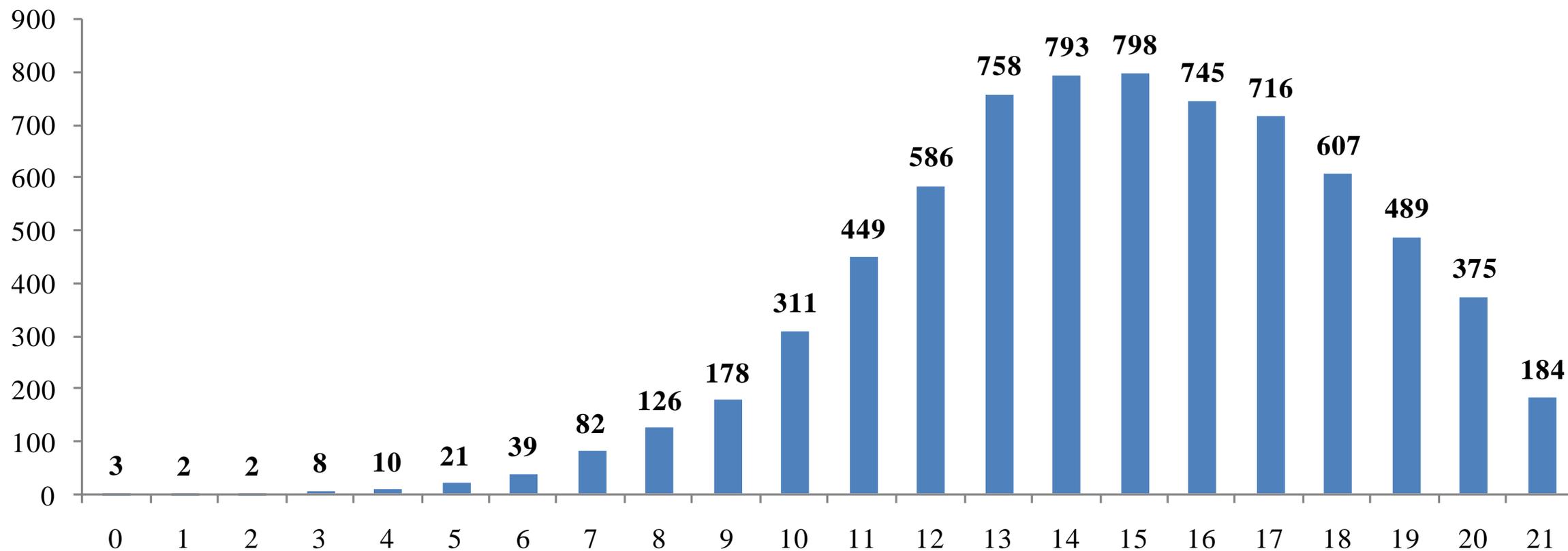
	2022 год		2023 год		2024 год	
	Число участников	% от общего числа	Число участников	% от общего числа	Число участников	% от общего числа
Математика профиль	6130	39,74	6062	41,79	5989	42,7
Математика база	8480	54,98	7992	55,09	7282	51,9

Базовый уровень	Субъект Российской Федерации	
	2023 г.	2024 г.
«2», %	2,7	1,5
«3», %	23,2	17,1
«4», %	44,3	50,0
«5», %	29,8	31,4
Средний балл	4,0	4,1

Шкала перевода

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Балл	0-6	7-11	12-16	17-21

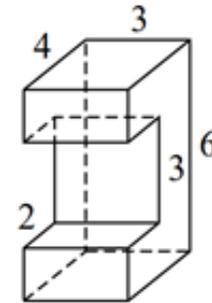
Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по математике (базовый уровень)



Сложные для участников ЕГЭ задания (с процентом выполнения ниже 50)

Задание №11

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Характеристика: задание проверяет сформированность умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- незнание формулы для вычисления площади боковой поверхности многогранника;
- неверное определение линейных размеров многогранника;
- неверное выделение многоугольников, составляющих многогранник, ведущее к неверному вычислению их площадей;
- пропуск/добавление слагаемых при вычислении площади боковой и полной поверхности многогранника;
- вычислительные ошибки.

19,91%

Задание №13

Даны два шара с радиусами 7 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?



Характеристика: задание проверяет сформированность умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- незнание связи объемов подобных фигур через коэффициент подобия;
- применение разных коэффициентов в формулах объемов разных шаров;
- подмена искомой величины;
- округление до целого на каждом этапе вычислений;
- вычислительные ошибки.

Задание №16

Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{11}} 11^2$.

Характеристика: задание проверяет сформированность умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- неверная применение свойства логарифма степени;
- сокращение показателя степени и показателя корня в основании логарифма;
- неверное вынесение показателя степени в основании логарифма;
- игнорирование основания логарифма, ведущее к вычислению степени под логарифмом;
- отбрасывание логарифма и дальнейшее вычисление значений степени и корня.

31,78%

Задание №17

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$.

Характеристика: задание проверяет сформированность умение решать показательные уравнения.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- неверное применение свойства степени с целым показателем;
- неверное выражение показателя степени;
- вычислительные ошибки.

50,08%

Задание №18

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\frac{(x-2)^2}{x-1} > 0$

Б) $\frac{x-1}{x-2} > 0$

В) $(x-1)(x-2) < 0$

Г) $(x-1)^2(x-2) < 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(1; 2)$

2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

3) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$

4) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Характеристика: задание проверяет сформированность умения решать рациональные неравенства.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- неверное применение алгоритма решения рациональных неравенств;
- неверная запись множества решений неравенств в виде промежутков;
- вычислительные ошибки;
- ошибки при заполнении таблицы.

26,61%

Задание №20

Из городов А и В, расстояние между которыми равно 320 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 170 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

Характеристика: задание проверяет сформированность умение решать текстовые задачи разных типов.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

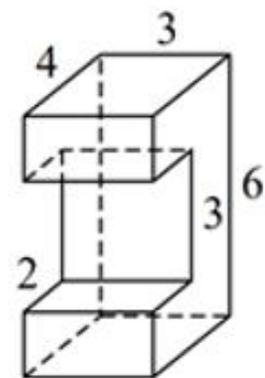
- неверная трактовка условия задачи;
- нахождение скорости движения без учета заданного времени;
- нахождение скорости движения без учета общего расстояния;
- вычислительные ошибки.

Процент выполнения заданий в группах с разным уровнем подготовки

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Новосибирской области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе получивших отметку «2»	в группе получивших отметку «3»	в группе получивших отметку «4»	в группе получивших отметку «5»
11	Уметь простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	Б	19,91	0,00	1,31	8,37	47,53

Задание №11

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Процент выполнения заданий в группах с разным уровнем подготовки

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Новосибирской области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний	в группе получивших отметку «2»	в группе получивших отметку «3»	в группе получивших отметку «4»	в группе получивших отметку «5»
21	Уметь выполнять вычисления и преобразования, решать текстовые задачи разных типов, умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи	Б	15,66	0,00	2,71	6,98	35,93

Задание №21

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 2 золотые монеты получить 3 серебряные и одну медную;
- за 5 серебряных монет получить 3 золотые и одну медную.

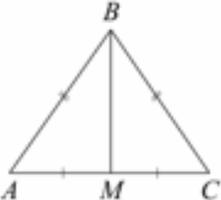
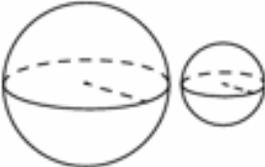
У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Характеристика: задание проверяет сформированность умение решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения.

Типичные ошибки (на основании веера ответов):

- неверная трактовка условия задачи;
- неверное выстраивание логических цепочек;
- неверное составление модели;
- вычислительные ошибки.

Результаты освоения умений по отдельным группам участников экзамена

В группе получивших отметку «5»	В группе получивших отметку «4»	В группе получивших отметку «3»
		<p>№12 (22,77%)</p> <p>В треугольнике ABC известно, что $AB=BC=26$, $AC=20$. Найдите длину медианы BM.</p> 
		<p>№13 (26,2%/ 5,93%)</p> <p>Даны два шара с радиусами 7 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?</p> 
		<p>№16 (16,9%/ 4,71%)</p> <p>Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{11}} 11^2$.</p>
		<p>№17 (37,55%/ 10,03%)</p> <p>Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 4$.</p>

Результаты освоения умений по отдельным группам участников экзамена

В группе получивших отметку «5»	В группе получивших отметку «4»	В группе получивших отметку «3»										
	<p>№18 (11,39%/ 2,53%)</p> <p>Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> <p>НЕРАВЕНСТВА</p> <p>А) $\frac{(x-2)^2}{x-1} > 0$.</p> <p>Б) $\frac{x-1}{x-2} > 0$.</p> <p>В) $(x-1)(x-2) < 0$.</p> <p>Г) $(x-1)^2(x-2) < 0$.</p> </td> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> <p>РЕШЕНИЯ</p> <p>1) (1; 2)</p> <p>2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$</p> <p>3) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$</p> <p>4) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$</p> </td> </tr> </table> <p>Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.</p> <p>Ответ: <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 25px;">А</td> <td style="width: 25px;">Б</td> <td style="width: 25px;">В</td> <td style="width: 25px;">Г</td> </tr> <tr> <td style="height: 30px;"> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table></p>		<p>НЕРАВЕНСТВА</p> <p>А) $\frac{(x-2)^2}{x-1} > 0$.</p> <p>Б) $\frac{x-1}{x-2} > 0$.</p> <p>В) $(x-1)(x-2) < 0$.</p> <p>Г) $(x-1)^2(x-2) < 0$.</p>	<p>РЕШЕНИЯ</p> <p>1) (1; 2)</p> <p>2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$</p> <p>3) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$</p> <p>4) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$</p>	А	Б	В	Г				
<p>НЕРАВЕНСТВА</p> <p>А) $\frac{(x-2)^2}{x-1} > 0$.</p> <p>Б) $\frac{x-1}{x-2} > 0$.</p> <p>В) $(x-1)(x-2) < 0$.</p> <p>Г) $(x-1)^2(x-2) < 0$.</p>	<p>РЕШЕНИЯ</p> <p>1) (1; 2)</p> <p>2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$</p> <p>3) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$</p> <p>4) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$</p>											
А	Б	В	Г									

Результаты освоения умений по отдельным группам участников экзамена

В группе получивших отметку «5»	В группе получивших отметку «4»	В группе получивших отметку «3»
		<p>№19 (23,56%) Найдите четырёхзначное число, большее 7000, но меньшее 9000, которое делится на 50, и каждая следующая цифра которого меньше предыдущей. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.</p> <p>№20 (20,42%) Из городов А и В, расстояние между которыми равно 320 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 170 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.</p>

Успешно выполненные задания всеми группами участников экзамена

2

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объём воды в Каспийском море	1) $78\,200\text{ км}^3$
Б) объём комнаты	2) 75 м^3
В) объём ящика для овощей	3) 0,5 л
Г) объём банки сметаны	4) 50 л

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

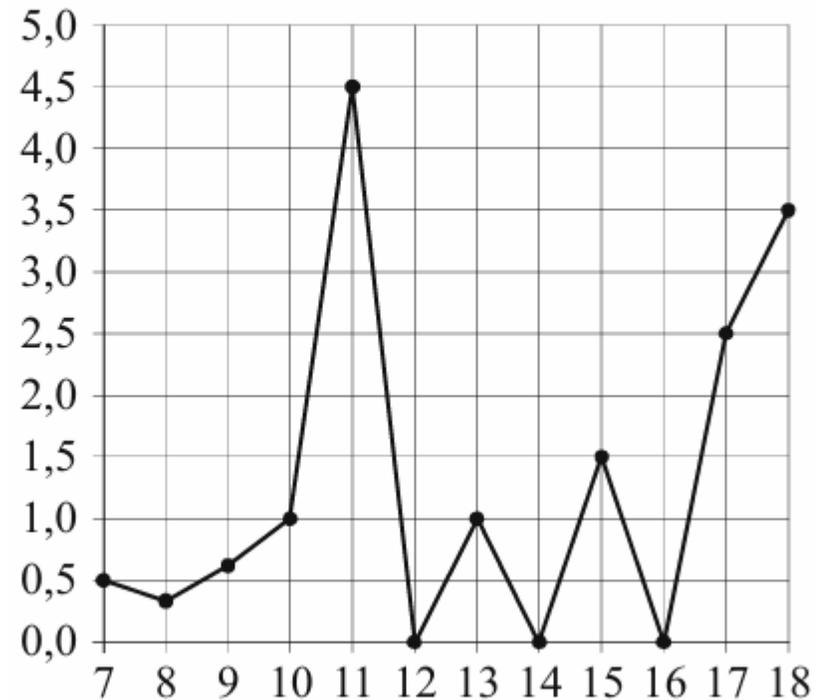
А	Б	В	Г

94,29%

Успешно выполненные задания всеми группами участников экзамена

3

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков в Элисте за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

98,15%

Успешно выполненные задания всеми группами участников экзамена

8

Хозяйка к празднику купила торт, ананас, сок и мясную нарезку. Торт стоил дороже ананаса, но дешевле мясной нарезки, сок стоил дешевле торта. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) Мясная нарезка — самая дорогая из покупок.
- 2) За сок заплатили больше, чем за мясную нарезку.
- 3) Ананас стоил дешевле мясной нарезки.
- 4) Торт — самая дешёвая из покупок.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

96,88%

Рекомендации по организации обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

Обучающимся с низким уровнем предметной подготовки

при изучении новых разделов по алгебре и началам анализа, геометрии можно предлагать составлять справочные материалы (совместно с учителем), вносить в них опорные задачи и алгоритмы их решения, а также основные формулы геометрии сопровождая их рисунками.

При отработке решения задач, в том числе вычислительного характера, выполнении тематических самостоятельных работ использовать эти материалы.

Рекомендации по организации обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

Обучающимся со средним уровнем предметной подготовки

в процессе изучения нового материала предлагать комплекс заданий, который включает в себя несложные задания теоретического характера (работа учащихся с различными источниками информации); задачи, допускающие несколько способов решения (составление различных математических моделей); геометрические задачи, позволяющие использовать различные формулы для нахождения искомых величин (работа со справочными материалами), а также задачи на распознавание простейших геометрических конструкций (работа по готовым чертежам).

Рекомендации по организации обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

Обучающимся с повышенным уровнем предметной подготовки

изучение программного материала со школьниками этой группы можно проводить от простого к сложному, включая больше заданий на поиск различных способов решения, доказательство основных свойств и утверждений, исследование математических моделей с использованием различных источников информации.

Рекомендации по организации обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

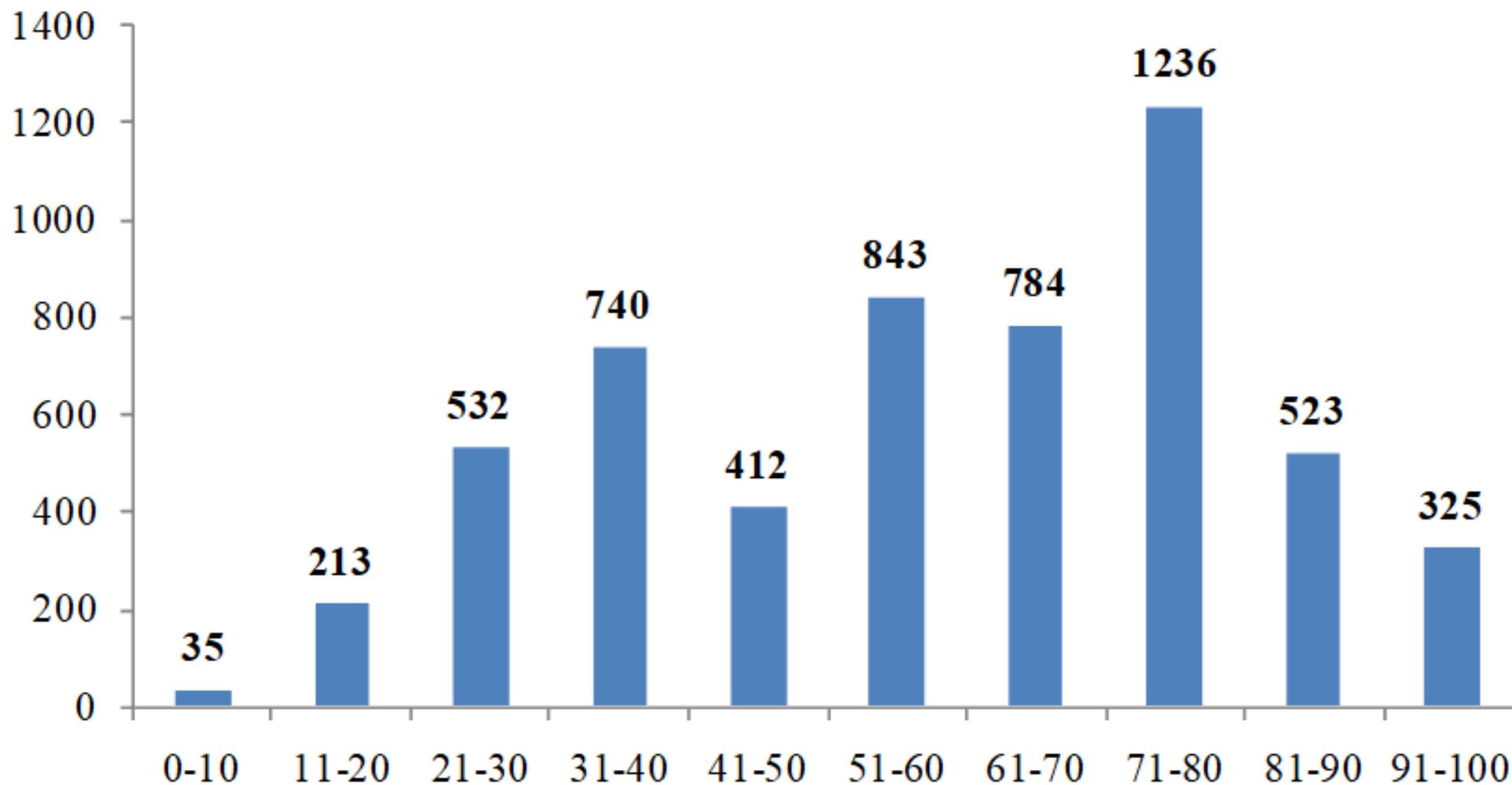
Обучающимся с высоким уровнем предметной подготовки

подбирать комплекс заданий так, чтобы проверялось владение не только содержательной частью, но и владение системой познавательных умений (обобщать, сравнивать, классифицировать) на примере задач базового уровня сложности. Учащимся необходимо предлагать задания, требующие выбора наиболее подходящего варианта с учетом самостоятельно выделенных критериев, выстраивать аргументацию и обосновывать собственные суждения.

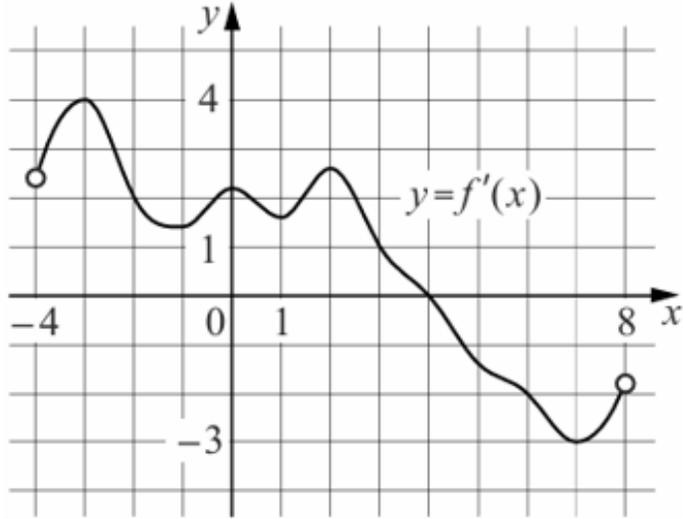
Динамика результатов ЕГЭ по предмету

Профильный уровень	Субъект Российской Федерации		
	2022 г.	2023 г.	2024 г.
ниже минимального балла, %	10,5	9,4	8,6
от минимального балла до 60 баллов, %	43,7	44,8	40,7
от 61 до 80 баллов, %	41,6	42,0	35,7
от 81 до 100 баллов, %	4,1	3,8	15,0
средний тестовый балл	53,9	54,0	58,6

Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)



**Сложные для участников ЕГЭ задания
в группах с разным уровнем подготовки
(базового уровня с процентом выполнения ниже 50,
повышенного, высокого уровня с процентом выполнения ниже 15)**

В группе от минимального до 60 тестовых баллов	
<p>№7</p> <p>Найдите значение выражения $2\sqrt{3} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{3}$.</p>	<p><i>Базовый уровень 25,46%</i></p>
<p>№8</p> <p>На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?</p> <div style="text-align: center;"></div>	<p><i>Базовый уровень 40,45%</i></p>

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

В группе от минимального до 60 баллов

№13

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \cos(x + \pi) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

*Повышенный
уровень
10,14%*

**Решаемость в группе
от 61 до 80 баллов**

68,86%

**Решаемость в группе
от 81 до 100 баллов**

91,16%

ПРИМЕР 1

№ 13

$$\sin 2x - \cos(x - \pi) = 0$$

$$2 \sin x \cos x - (\cos x \cos \pi + \sin x \sin \pi) = 0$$

$$2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

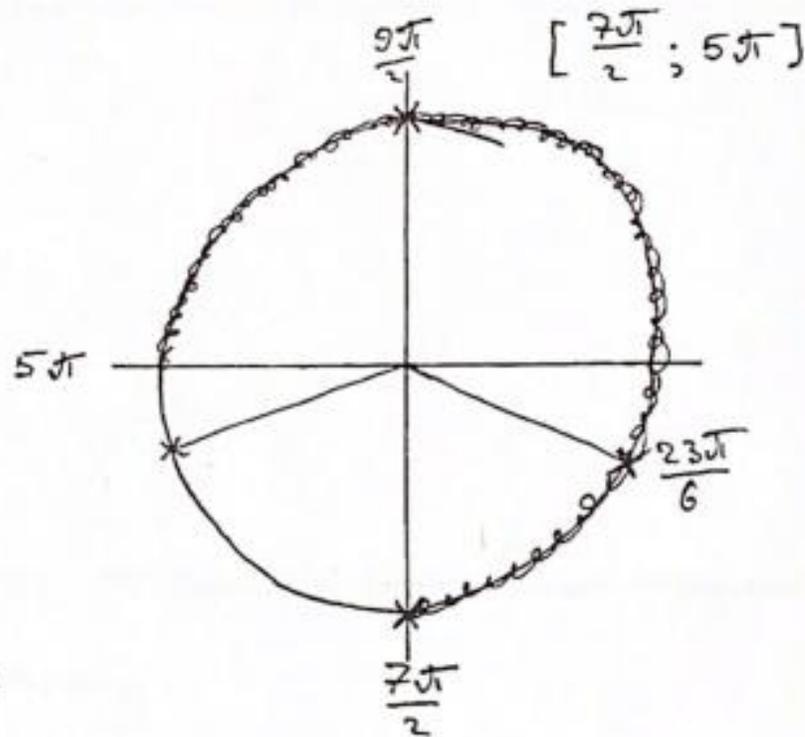
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$



$$\delta) \frac{7\pi}{2}; \frac{23\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}.$$

ЗАДАНИЕ 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

ПРИМЕР 2

$$13. \text{ a) } \sin 2x - \sqrt{3} \cos(x + \pi) = 0$$

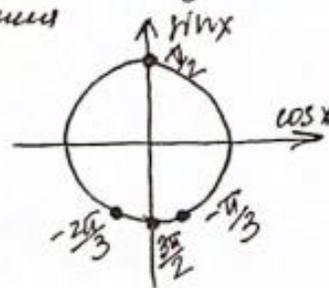
$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\cos x / (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

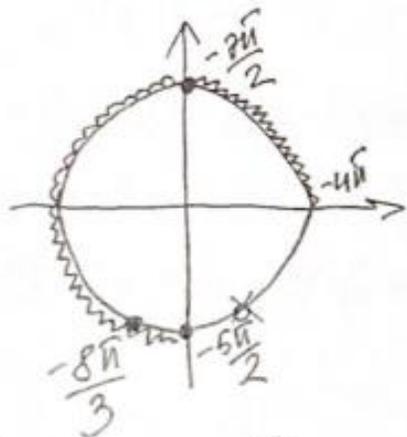
используем формулу двойного угла
и формулу приведения



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + \pi l; l \in \mathbb{Z}$$

б)



Отберём на числовой
окружности дуги, которые $\in \left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Наши решения: $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$,

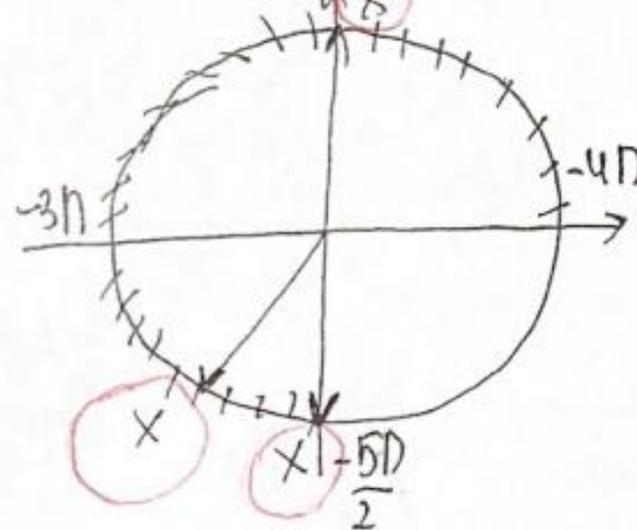
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + \pi l; l \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{2}; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{5\pi}{2}.$$

ПРИМЕР 3

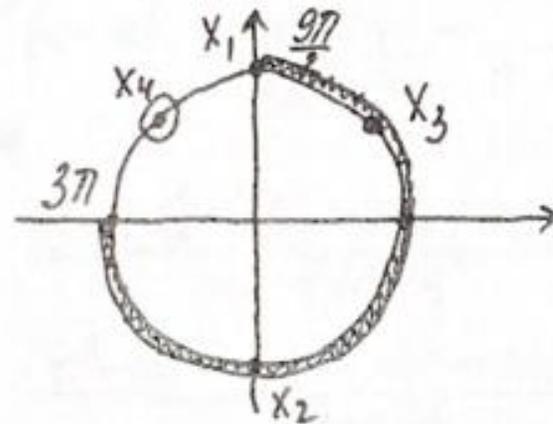
б) Отбор корней на окружности в промежутке $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$



$$\begin{aligned}x &= -4\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{2} \\x &= -3\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3} \\&\dots \\x &= -\frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

ПРИМЕР 4

б) Произведём отбор корней с помощью тригонометр. окр-ти на промежутке $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$



$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{9\pi}{2} ; \\x_2 &= 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} ; \\x_3 &= \frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{18\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}\end{aligned}$$

ПРИМЕР 5

$$\begin{aligned} \text{1) } -4n &\leq \frac{n}{2} + 2n \leq -\frac{5n}{2} \quad | :n & \left. \begin{array}{l} -4n \leq \frac{n}{3} + 2n \leq -\frac{5n}{2} \quad | \cdot \frac{3}{n} \\ -12 \leq 1 + 6n \leq -\frac{15}{2} \quad | -1 \\ -13 \leq 6n \leq -\frac{17}{2} \quad | :6 \\ -\frac{13}{6} \leq n \leq -\frac{17}{12} \end{array} \right\} \\ -4 &\leq \frac{1}{2} + n \leq -\frac{5}{2} \quad | -\frac{1}{2} & \\ -\frac{9}{2} &\leq n \leq -\frac{6}{2} & \\ n = -4 &\Rightarrow \frac{n}{2} + 4n \Rightarrow \frac{9n}{2} & \\ n = -3 &\Rightarrow \frac{n}{2} + 3n \Rightarrow \frac{7n}{2} & \\ & & \left. \begin{array}{l} n = -2 \Rightarrow \frac{n}{3} + 4n \Rightarrow -\frac{11n}{3} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Способы отбора корней с помощью:

- неравенств,
- организованного перебора,
- окружности,
- графика,
- числовой прямой

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

В группе от минимального до 60 баллов

№15

Решите неравенство $11^x - 6 - \frac{24 \cdot 11^x - 244}{121^x - 16 \cdot 11^x + 60} \leq \frac{1}{11^x - 10}$.

*Повышенный
уровень
0,5%*

**Решаемость в группе
От 61 до 80 баллов**

17,6%

**Решаемость в группе
От 91 до 100 баллов**

79,48%

№15

Решите неравенство $11^x - 6 - \frac{24 \cdot 11^x - 244}{121^x - 16 \cdot 11^x + 60} \leq \frac{1}{11^x - 10}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_{11} 6; \log_{11} 10)$; $(\log_{11} 10; 1]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
2	

ПРИМЕР 1

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть $2^x = t$, тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} - \frac{1}{t - 4} \leq 0$$

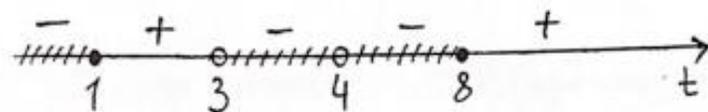
$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} - \frac{1}{t-4} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 7t^2 + 12t - 6t^2 + 42t - 72 - 10t + 40}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(t^2 - 12t + 32)}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(t-8)(t-4)}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$



$$t \leq 1$$

$$2^x \leq 1$$

$$x \leq 0$$

$$3 < t < 4$$

$$3 < 2^x < 4$$

$$3^{\log_3 2} < 2^x < 2^2$$

$$\log_3 2 < x < 2$$

$$4 < t \leq 8$$

$$4 < 2^x \leq 8$$

$$2^2 < 2^x \leq 2^3$$

$$2 < x \leq 3$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 2) \cup (2; 3]$.

ПРИМЕР 2

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4},$$

Пусть $t = 2^x$, $t > 0$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4};$$

$$t - 6 \leq \frac{1}{t - 4} + \frac{9t - 37}{(t - 3)(t - 4)},$$

$$t - 6 \leq \frac{(t - 3) + 9t - 37}{(t - 4)(t - 3)};$$

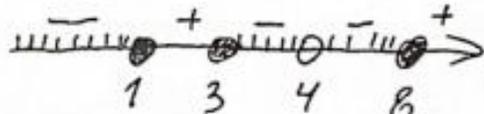
$$t - 6 \leq \frac{10t - 40}{(t - 4)(t - 3)};$$

$$t - 6 \leq \frac{10(t - 4)}{(t - 4)(t - 3)};$$

$$\begin{cases} t - 6 \leq \frac{10}{t - 3}; \\ t - 4 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{10}{t - 3} - t + 6; \\ t \neq 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{10 - (t - 6)(t - 3)}{t - 3}; \\ t \neq 4; \end{cases}$$

ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{10 - t^2 + 9t - 18}{t - 3}; \\ t \neq 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{-t^2 + 9t - 8}{t - 3}; \\ t \neq 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \geq \frac{t^2 - 9t + 8}{t - 3}; \\ t \neq 4; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \geq \frac{(t-8)(t-1)}{(t-3)}; \\ t \neq 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 1; \\ t \geq 3; \\ t \neq 4; \\ t \leq 8; \end{cases}$$


$$\begin{cases} 2^x \leq 1; \\ 2^x \geq 3; \\ 2^x \neq 4; \\ 2^x \leq 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0; \\ x \geq \log_2 3; \\ x \neq 2; \\ x \leq 3; \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$$

$$\text{Ответ. } (-\infty; 0] \cup [\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$$

ПРИМЕР 3

$$3^x - 8 - \frac{6 \cdot 3^x - 19}{3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6} \leq \frac{1}{3^x - 3}$$

Пусть $3^x = t, t > 0$, тогда:

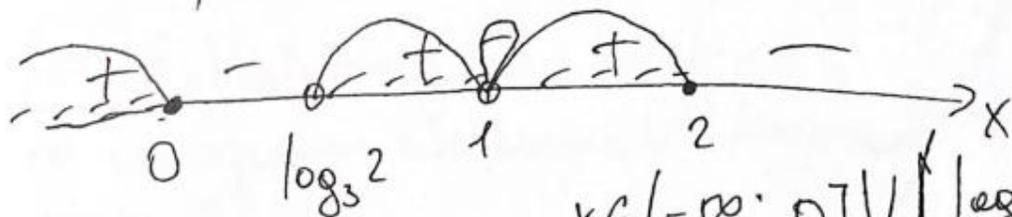
$$\frac{t-8}{1} - \frac{6t-19}{t^2-5t+6} \leq \frac{1}{t-3}$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 40t - 29}{t^2 - 5t + 6} \leq \frac{1}{t-3}$$

$$t^4 - 16t^3 + 78t^2 - 144t + 81 \leq 0$$

$$(t-1)(t-3)(t^2-12t+27) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \leq 3 \\ t \leq 9; t \leq 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3^x \leq 1 \\ 3^x \leq 3 \text{ (D)} \\ 3^x \leq 9 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \leq 1 \text{ (D)} \\ x \leq 2 \end{array} \right.$$



$$x \in (-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2].$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1) \cup (1; 2].$$

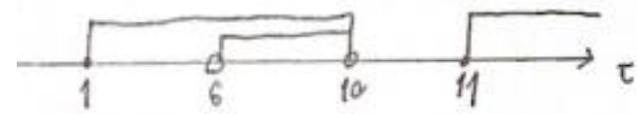
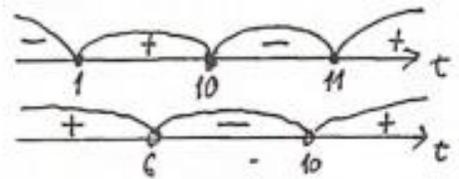
ПРИМЕР 4

$$15. \frac{(t-1) \cdot (t-10) \cdot (t-11)}{(t-6) \cdot (t-10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (t-1) \cdot (t-10) \cdot (t-11) \geq 0 \\ (t-6) \cdot (t-10) < 0 \end{array} \right. \quad (1) \\ \left\{ \begin{array}{l} (t-1) \cdot (t-10) \cdot (t-11) \leq 0 \\ (t-6) \cdot (t-10) > 0 \end{array} \right. \quad (2) \\ t > 0 \\ t \neq 6, 10 \end{array} \right.$$

$$(1) \begin{cases} (t-1) \cdot (t-10) \cdot (t-11) > 0 \\ (t-6) \cdot (t-10) < 0 \end{cases}$$

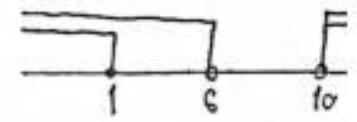
$$\begin{cases} t \in [1; 10] \cup [11; +\infty) \\ t \in (6; 10) \end{cases}$$



$$t \in (6; 10)$$

$$(2) \begin{cases} (t-1) \cdot (t-10) \cdot (t-11) \leq 0 \\ (t-6) \cdot (t-10) > 0 \end{cases}$$

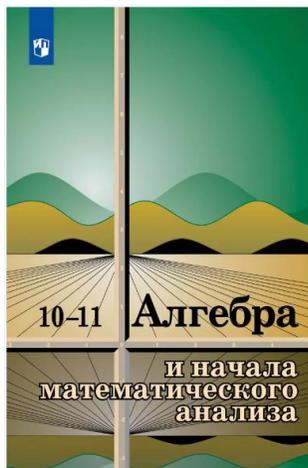
$$\begin{cases} t \in (-\infty, 1] \cup [10; 11] \cup [11; +\infty) \\ t \in (-\infty, 6) \cup (10; +\infty) \end{cases}$$



$$t \in (-\infty, 1] \cup (10, 11]$$

Решение системы: $t \in (0; 1] \cup (6; 10) \cup (10, 11]$

Схема метода интервалов



Метод интервалов.

1. Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$. Рассмотреть функцию $f(x)$.
2. Найти область определения функции $f(x)$.
3. Найти нули функции $f(x)$, решив уравнение $f(x) = 0$.
4. Отметить на числовой прямой область определения и нули функции $f(x)$.
5. Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
6. Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (обратив внимание на нули функции).

УДК 373.167.1:512 + 517
ББК 22.14672
А45

Авторы

А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дулищан,
В. М. Исаев, С. И. Шарифуллин

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 20106-0213/15 от 31.10.07)
и Российской академии образования (№ 01.200.07.74 от 11.10.07)

Алгебра и начала математического анализа : учеб. для
А45 10–11 кл. образовател. учреждений / [А. Н. Колмо-
горов, А. М. Абрамов, Ю. П. Дулищан и др.] ; под ред.
А. Н. Колмогорова. — 17-е изд. — М. : Просвещение,
2008. — 384 с. : ил. — ISBN 978-5-09-019513-3.

УДК 373.167.1:512 + 517
ББК 22.14672 + 22.161.072

ISBN 978-5-09-019513-3

© Издательство «Просвещение», 1990
© Издательство «Просвещение»,
с дополнениями, 2008
© Издательство «Просвещение»,
Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

В группе от минимального до 60 баллов

№16

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма платежей составит 311 040 рублей?

*Повышенный
уровень
4,12%*

**Решаемость в группе
от 61 до 80 баллов**

36,83%

**Решаемость в группе
от 91 до 100 баллов**

83,25%

ПРИМЕР 1

$S_{руб}$ - сумма кредита

$r = 25\%$ - процентная ставка

$k = 1 + 0,01 r = 1,25 = \frac{5}{4}$ - коэф. увеличения кредита

$X_{руб.}$ - ежегодная выплата по кредиту

Год	Сумма ^к после начисления процентов	Выплата	Остаток
1	Sk	X	$Sk - X$
2	$Sk^2 - Xk$	X	$Sk^2 - Xk - X$
3	$Sk^3 - Xk^2 - Xk$	X	$Sk^3 - Xk^2 - Xk - X$
4	$Sk^4 - Xk^3 - Xk^2 -$ $- Xk - X$	X	0
...
...

ПРИМЕР 1

$$\begin{cases} Sk^4 - xk^3 - xk^2 - xk - x = 0 \\ 4x = 345000 \end{cases} \quad \begin{cases} Sk^4 = x(k^3 + k^2 + k + 1) \quad (I) \\ x = 93450 \end{cases}$$

$$(I) S = \frac{x(k^3 + k^2 + k + 1)}{k^4}$$

$$S = \frac{93450 \cdot \left(\frac{125}{64} + \frac{25^{(4)}}{16} + \frac{5^{(16)}}{4} + 1 \right)}{\frac{625}{256}} = 93450 \cdot \frac{125 + 100 + 80 + 64}{64}$$

$$\bullet \frac{256}{625} = \overset{150}{93450} \cdot \frac{369}{64} \cdot \frac{256^4}{625} = 600 \cdot 369 = 221400 \text{ рублей}$$

Ответ: 221400 рублей

№16

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Принципы построения математической модели

- Условие текстовой задачи перевести на математический язык, т.е. получить математическую задачу.**
- Представить задачу в виде уравнения (системы уравнений), неравенства (системы неравенств), или функции, (с ограничениями), которую нужно исследовать, или цепочки арифметических вычислений.**
- Кроме представления самой задачи, нужно обязательно продвинуться в решении.**

№16

Важно:

- **полно и лаконично описать построение модели;**
- **ввести минимально необходимое количество переменных;**
- **установить связь между величинами;**
- **провести рациональное исследование модели.**

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

Задание №18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решаемость в группе от минимального до 60 баллов	Решаемость в группе от 61 до 80 баллов	Решаемость в группе от 91 до 100 баллов
0,01%	1,61%	46,4%

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

Задание №18

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Характеристика: задание проверяет сформированность умений комбинировать различные изученные алгоритмы для решения задач, использовать различные методы, включая графические.

№18

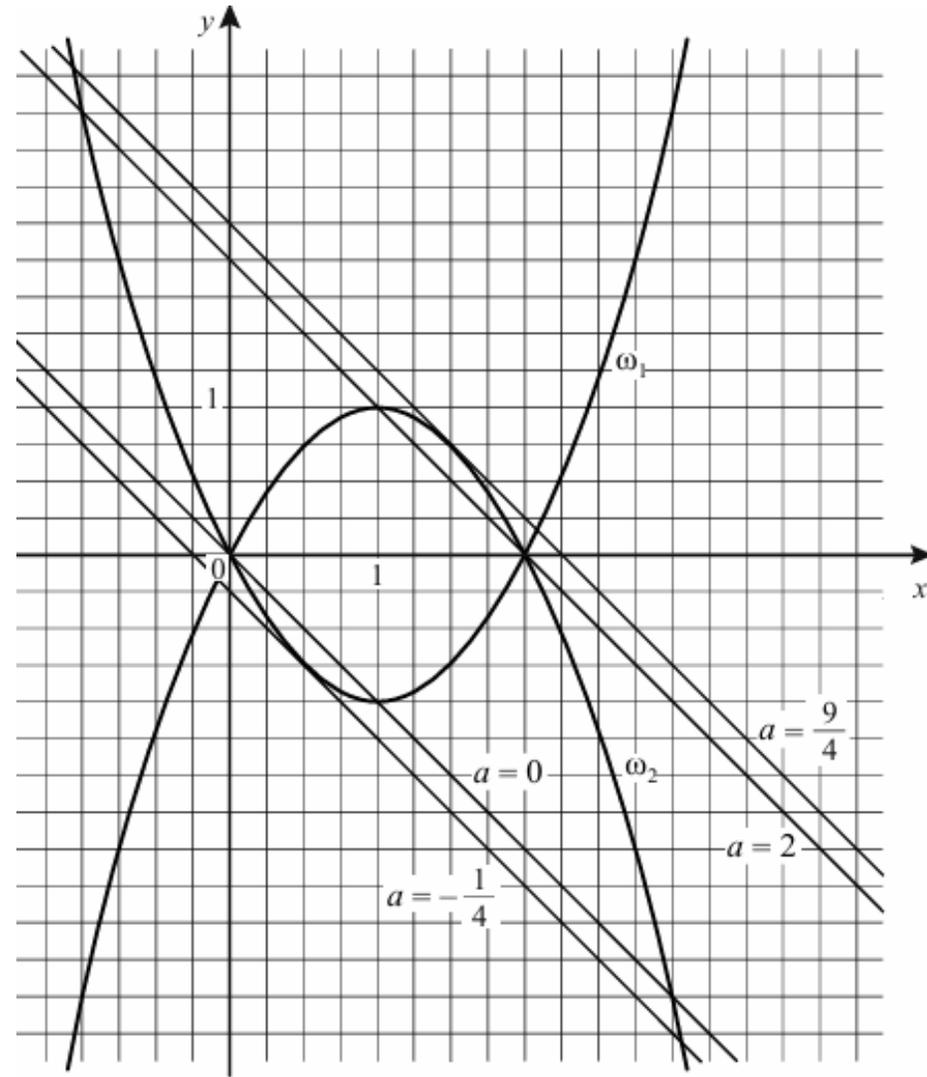
Решение.

Уравнение $x + y = a$ задаёт для каждого значения a на плоскости Oxy прямую l , параллельную прямой $y = -x$ (или совпадающую с ней).

Уравнение $|y| = |x^2 - 2x|$ задаёт на плоскости Oxy множество точек, представляющее собой объединение параболы ω_1 , заданной уравнением $y = (x-1)^2 - 1$, и параболы ω_2 , заданной уравнением $y = -(x-1)^2 + 1$. Параболы ω_1 и ω_2 имеют две общие точки: $(0;0)$ и $(2;0)$.

Типичные ошибки:

- при раскрытии модулей в уравнении;
- при построении эскизов графиков парабол и прямых (неверное указание координат вершин парабол, ключевых точек пересечения графиков функций, зеркальный наклон прямых);
- неверное определение количества точек пересечения парабол и прямых, их взаимного расположения при различных значениях параметра;
- вычислительные ошибки.



ПРИМЕР 1

$$\begin{cases} ① \ x + y = a \\ ② \ |y| = |x^2 - 4x| \end{cases}$$

При каких a ровно 2 ~~3~~ решения?

Рассмотрим уравнение ①:

$y = a - x$ — ^(линейная функция) прямая, двигающаяся вдоль Oy .

Рассмотрим уравнение ②:

$$|y| = |x^2 - 4x|$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \quad \& \text{или} \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases}$$

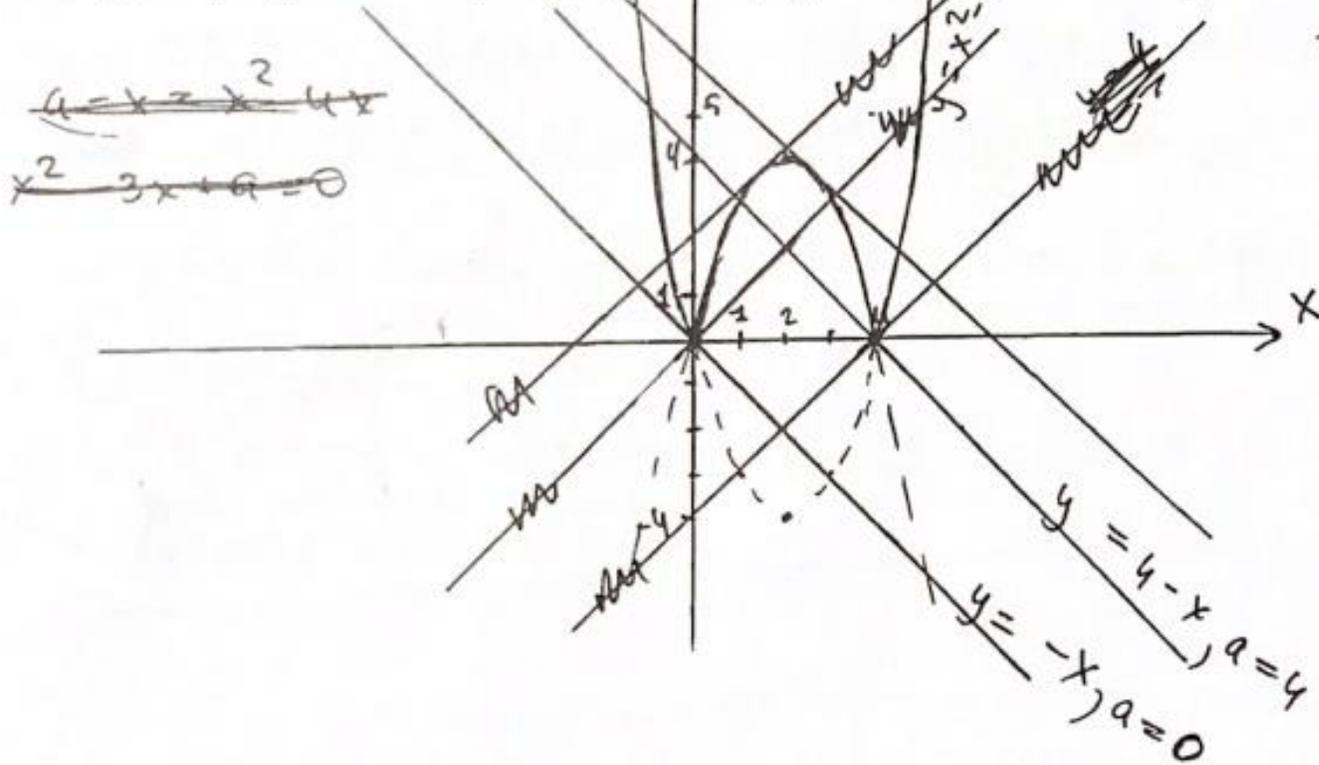
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x \in (0; 4) \end{cases}$$

$y = x^2 - 4x$ — квадратичная ф-ция, график — парабола,
ветви вверх

ПРИМЕР 1

$y = -x^2 + 4x$ - квадратичная функция, график - парабола,
ветви вниз.

Изобразим графики функции в xOy .



~~a = 4~~
 $a - x = -x^2 + 4x$
 $x^2 - 5x + a = 0$
 $D = 25 - 4a$
 $D = 0$
 $25 - 4a = 0$
 $a = \frac{25}{4}$

Ответ: $a \in (0; 4) \cup (\frac{25}{4}; +\infty)$

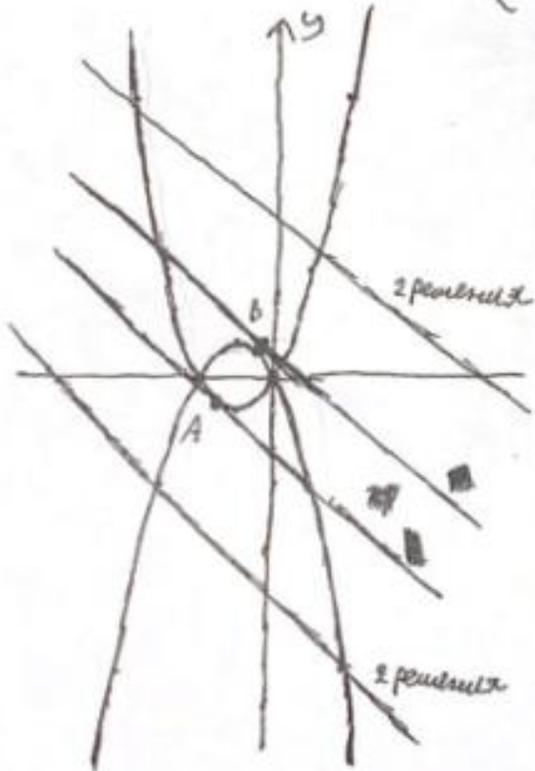
ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} xy = a \\ |y| = |x^2 + 2x| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + a \\ |y| = |x^2 + 2x| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + a \\ y \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим: ...



Самые экстремальные значения a будут, когда прямая $y = -x + a$ будет касаться графика $|y| = |x^2 + 2x|$ и не пересекать его.

Найдем при каких a прямая $y = -x + a$ будет касаться графика $|y| = |x^2 + 2x|$

$$\begin{cases} -1 = 2x + 2 \\ -x + a = x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + a = \frac{9}{4} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ a = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = -2x - 2 \\ -x + a = -x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + a = -\frac{1}{4} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ $a \in (-\infty; -\frac{9}{4}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

Задание №14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 4. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN:ND = 1:3$.

- а) Докажите, что точка M — середина ребра SC .
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

Решаемость в группе от минимального до 60 баллов	Решаемость в группе от 61 до 80 баллов	Решаемость в группе от 91 до 100 баллов
0,1%	1,62%	30,35%

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

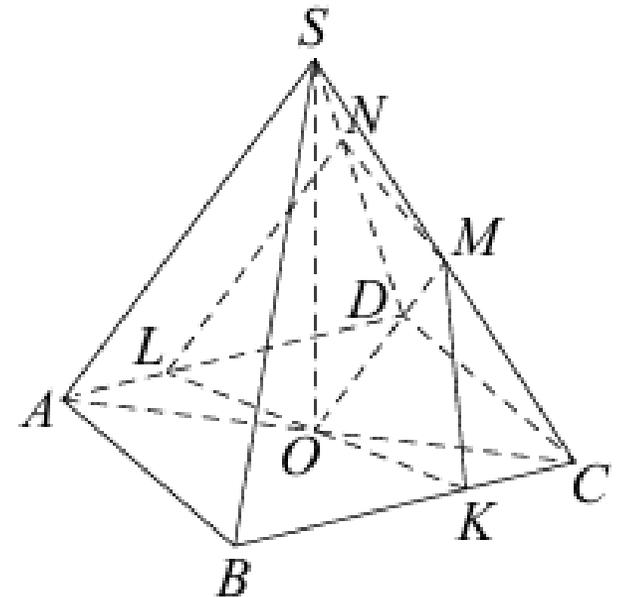
Задание №14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 4. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN:ND = 1:3$.

- Докажите, что точка M — середина ребра SC .
- Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

Типичные ошибки:

- невнимательное чтение условия задачи;
- неверное построение искомой плоскости;
- неверное применение определения и признака параллельности прямой и плоскости;
- неверное применение признаков подобия треугольников;
- в вычислении коэффициента подобия;
- в применении теоремы косинусов;
- вычислительные ошибки.



Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

Задание №17

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

Решаемость в группе от минимального до 60 баллов	Решаемость в группе от 61 до 80 баллов	Решаемость в группе от 91 до 100 баллов
0,36%%	6,14%	59,75%

Сложные для участников ЕГЭ задания в группах с разным уровнем подготовки

Задание №17

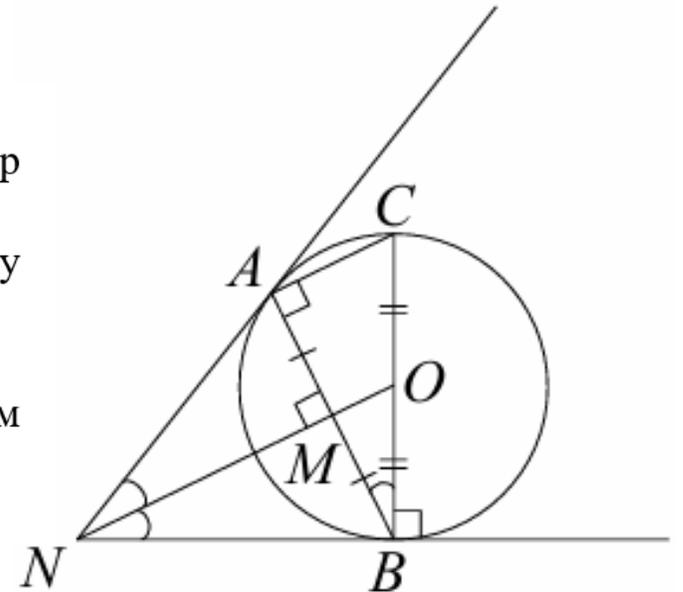
Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

Типичные ошибки:

- произвольная трактовка условия, ведущая к искажению задачи (выбор конкретных углов, произвольное равенство отрезков);
- подмена определения расстояния от точки до прямой расстоянием между двумя точками;
- неверное применение признаков подобия треугольников;
- неверное соотношение сторон в прямоугольном треугольнике по известным тригонометрическим функциям углов;
- вычислительные ошибки.



При решении геометрических задач важно помнить:

- 1) чертеж-неотъемлемая часть решения;**
- 2) возможно многократное построение чертежа для наглядного отображения ситуации;**
- 3) все детали отмечать на чертеже, соблюдать пропорции;**
- 4) удачный чертеж-ключ к решению;**
- 5) лаконично обосновывать решение;**
- 6) записывать формулы в общем виде;**
- 7) отделять расчеты от подстановки значений.**

Рекомендации по организации обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

[О нас](#) ▾ [ЕГЭ](#) ▾ [ОГЭ](#) ▾ [ГВЭ](#) ▾ [Навигатор подготовки](#) ▾ [Методическая копилка](#) ▾ [Журнал ФИПИ](#) [Услуги](#) ▾

[Открытый банк заданий ЕГЭ](#) [Открытый банк заданий ОГЭ](#) [Итоговое сочинение](#) [Итоговое собеседование](#) [Иностранным гражданам](#)

[Открытый банк оценочных средств по русскому языку](#) [Открытый банк заданий для оценки естественнонаучной грамотности](#) [Открытый банк заданий ГВЭ-9](#)

[Открытый банк заданий для оценки читательской грамотности](#)

[ФГБНУ «ФИПИ»](#) → [ЕГЭ](#) → [Открытый банк заданий ЕГЭ](#) → [Открытые варианты КИМ ЕГЭ](#)

Открытые варианты КИМ ЕГЭ 2024

В данном разделе опубликованы открытые варианты контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2024 года.



Федеральная служба по надзору в сфере образования
и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

ФИПИ

**И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Самсонов,
А.В. Семенов**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные
на основе анализа типичных ошибок
участников ЕГЭ 2024 года**

по МАТЕМАТИКЕ

Москва, 2024

[Русский язык](#)

[Математика](#)

[Физика](#)

[Химия](#)

[Информатика](#)

[Биология](#)

[История](#)

Диагностика образовательных достижений (предметных знаний)

- 13 а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

- 14 В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

- а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .
б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

- 15 Решите неравенство $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$.

- 16 В июле 2026 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2032, 2033, 2034, 2035 и 2036 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2036 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r .

- 17 Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

- а) Докажите, что $AC = CE$.
б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

- 19 Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару, большее число в которой равно 400?
б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару $(806; 788)$?
в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$?