НОВОСИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ МОНИТОРИНГА И РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Особенности подготовки к государственной итоговой аттестации в 11 классах по учебному предмету «Математика» на основе анализа результатов предметной диагностической работы

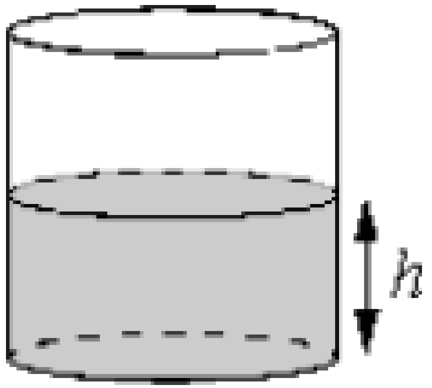
НОВОСИБИРСК 2024

Задачи, вызвавшие затруднения

ГЕОМЕТРИЯ

Базовый уровень

11.1 Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне h = 10 см.
На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания втрое меньше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.



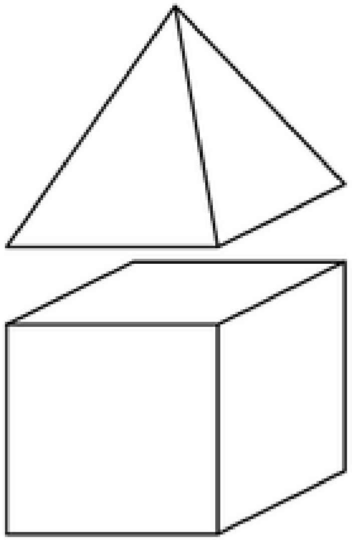
$$V=\pi R^2 H;\ \ V=\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot H_1=\pi R^2 H_1\cdot\frac{1}{9};\ \ H_1\cdot\frac{1}{9}=H.$$

$$H_1=9\cdot H=9\cdot 10=90$$

ОТВЕТ: 90

ГЕОМЕТРИЯ
Базовый уровень

11.2 К кубу с ребром 1 приклеили правильную четырёхугольную пирамиду с ребром 1 так, что квадратные грани совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые ребра на рисунке не изображены)?

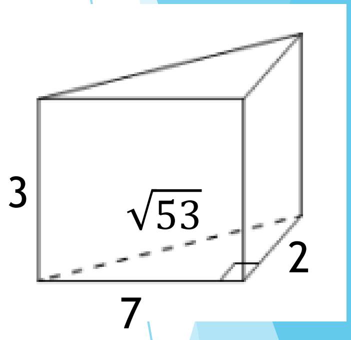


ОТВЕТ: 9

ГЕОМЕТРИЯ

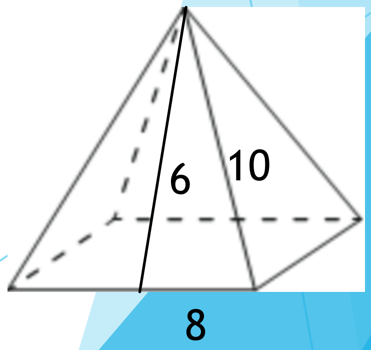
Базовый уровень

13.1 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2, а Гипотенуза $\sqrt{53}$. Найдите объем призмы, если ее высота равна 3.



$V = S_{осн} \cdot H = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7\right) \cdot 3 = 21$ ОТВЕТ: 21

13.2 Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 16, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.



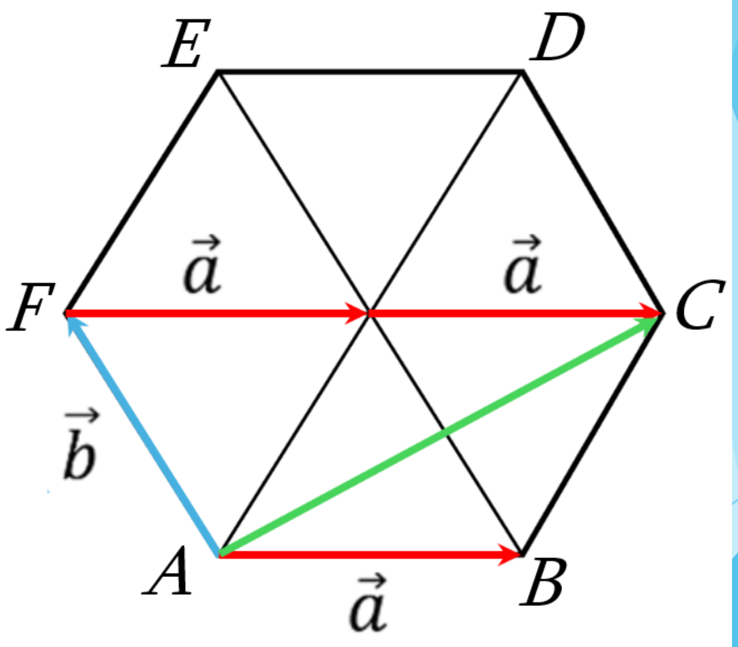
$S_{пп} = S_{осн} + S_{бп} = 16^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6\right) = 448$ ОТВЕТ: 448

Задачи, вызвавшие затруднения

ГЕОМЕТРИЯ

Профильный уровень ЧАСТЬ 1

2.1 Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AF} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AC} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа. Найдите число, равное $x + y$.



$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + 2\vec{a}$, $x = 2, y = 1$. Тогда $x + y = 3$

ОТВЕТ: 3

Задачи, вызвавшие затруднения

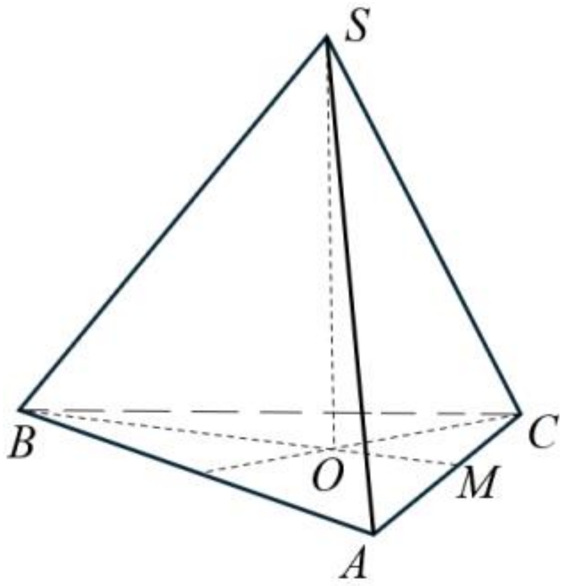
ГЕОМЕТРИЯ
Профильный уровень ЧАСТЬ 1
2.2 Даны векторы $\vec{a}\{2; 0; -2\}, \vec{b}\{2; -1; 3\}, \vec{c}\{x; 1; 2\}$. Известно, что векторы $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярны. Найдите x. Найдем координаты векторов: $(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$: $\{2 - 2 - x; 0 + 1 - 1; -2 - 3 - 2\} = \{-x; 0; -7\}$ $(\vec{a} + \vec{b})$: $\{2 + 2; 0 - 1; -2 + 3\} = \{4; -1; 1\}$ $(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{b}) = 0$ $(-x) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + (-7) \cdot 1 = 0$ $x = -\frac{7}{4};\ \ x = -1{,}75$ ОТВЕТ: $-1{,}75$

Задачи, вызвавшие затруднения

ГЕОМЕТРИЯ

Профильный уровень ЧАСТЬ 1

3. Дана правильная треугольная пирамида SABC с вершиной S. Найдите угол между высотой пирамиды и ребром SB, если высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а сторона основания пирамиды равна 6. Ответ дайте в градусах.



$BO = \frac{2}{3}BM$, $BM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$, $BO = 2\sqrt{3}$

Треугольник SOB равнобедренный прямоугольный.

$\angle BSO = 45^0$

ОТВЕТ: 45

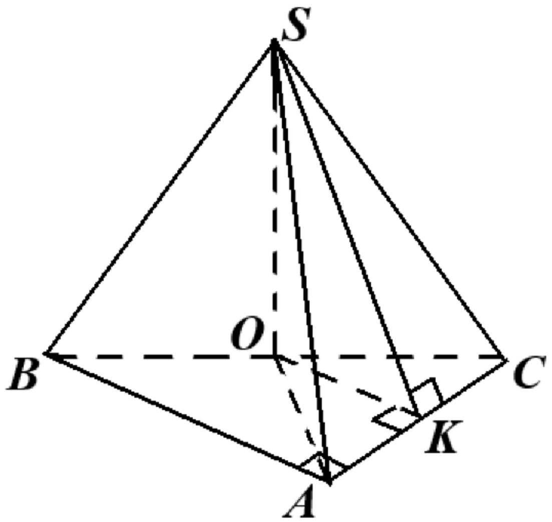
№14.1 В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра BC.

а) Докажите, что $SC = SA$.

б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AC = 2\sqrt{11}, BC = 12,$ $SB = \sqrt{85}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

РЕШЕНИЕ:



а) Так как в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник *ABC*, то середина гипотенузы точка *O* является центром его описанной окружности, а значит, *AO=BO=CO*. Получаем, что проекции наклонных *SA*,*SB*,*SC* равны между собой. Тогда равны и сами наклонные, в частности, *SC=SA*. Доказано.

б) В плоскости *ABC* проведем среднюю линию *OK* параллельно стороне АВ. Тогда $OK \perp AC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $SK \perp AC$. А величина угла между плоскостями *SAC* и *ABC* равна величине угла *SKO*.

Найдем его величину. В треугольнике ABC по теореме Пифагора

$AB^2 = BC^2 - AC^2, AB = \sqrt{144 - 44} = 10$, $OK = \frac{1}{2}AB = 5$. В прямоугольном треугольнике SOC по теореме Пифагора $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 85 - 36 = 49,\ SO = 7$.

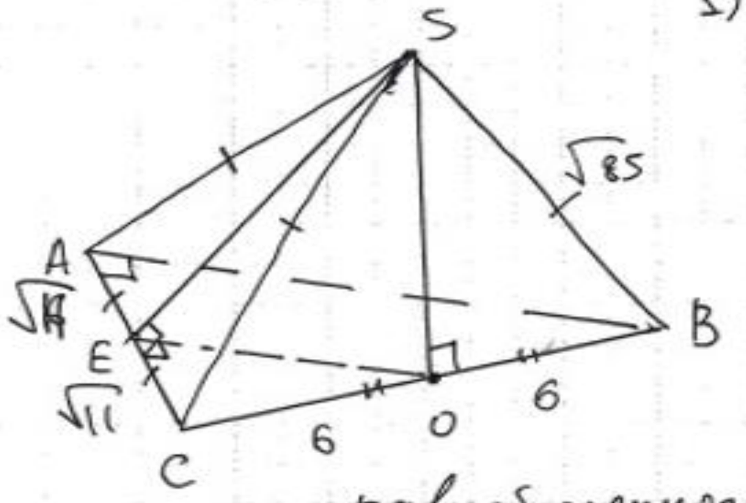
Тогда в прямоугольном треугольнике SOK: $tg\,\angle S\,KO = \frac{SO}{OK} = \frac{7}{5}$. ОТВЕТ: $arctg\,\frac{7}{5}$.

№14

б) Дополнительно дано, что $AC = 2\sqrt{11}$, $BC = 12$, $SB = \sqrt{85}$

Найти: $\angle((SAC);(ABC)) = ?$

Решение:



1) $\triangle SCB$: равнобедренный

$\triangle SCB$ – ~~р/б~~ р/б по ~~призн.~~ признаку, т.к.

SO явл. и медианой и высотой

2) $SC = SA \Rightarrow \triangle SAC$ ~~р/б~~ р/б по определению равнобедренный

тогда ~~SE~~

Д.п.: $SE \perp AC$, при этом

$AE = CE$ по св-ву высоты равнобедренного треугольника, проведённой к его основанию.

3) $SO \perp (ABC)$
SE – наклонная
$SE \perp AC$
OE – проекция
$\Rightarrow OE \perp AC$ по т-ме о трёх перпендикулярах

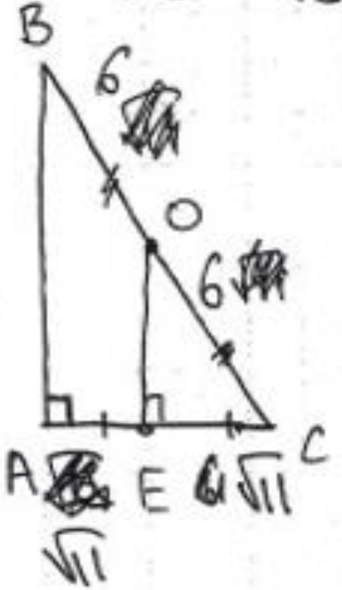
тогда $(ASC) \cap (ABC) = AC$
$SE \perp AC$, $SE \subset (ASC)$
$OE \perp AC$, $OE \subset (ABC)$
$\Rightarrow \angle((ASC),(ABC)) = \angle SEO$

№14

б)

4) ~~ABC~~: $\triangle OEC$:

$OE = \sqrt{36-11} = 5$ по теореме Пифагора



5) $\triangle SEC$:

$SE = \sqrt{85-11} = \sqrt{74}$ по теореме Пифагора

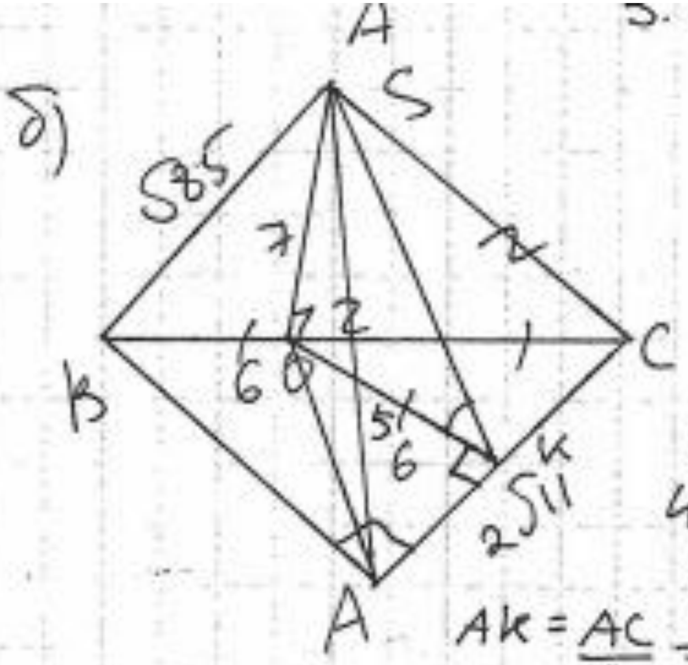
6)

$\triangle SEO$:

$\angle SEO = \arccos \frac{5}{\sqrt{74}} = \frac{5\sqrt{74}}{74}$

Ответ: $\frac{5\sqrt{74}}{74} = \angle((ASC);(ABC))$

Нет доказательства пункта а) в пункте б) получен верный ответ.
1 балл



б) SO – перпен.
SK – накл.
KO – проекция (ABC $\Big|$ => $\angle SKO$ – искомый

2. т.к. OA медиана => $BO = OC = AO = 6$
3. по теор. о 3 $\perp$ + п.1 => $AO \perp AC$
4. рассмотрим $\triangle AOK$: по т. Пифаг.
$OK = \sqrt{6^2 - AK^2}$
$AK = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$ (т.к. $\triangle AOC$ р/б $AK = KC$)
$OK = \sqrt{36-11} = 5$
5. рас. $\triangle BSO$: по т. Пифаг. $SO = \sqrt{85-36} = 7$
6. $tg\angle SKO = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 0{,}14$, $\angle SKO = arctg\, 0{,}14$

Ответ: $arctg\, 0{,}14$

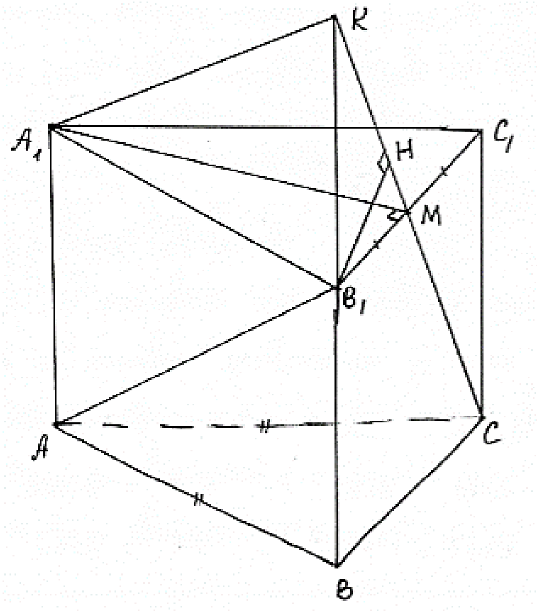
Вычислительная ошибка в последней строке.
Если доказан пункт а), то 2 балла.
Если пункт а) не доказан, то 0 баллов

№14.2 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$. Точка M – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна плоскости CMA_1.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости CMA_1, если известно, что $BC = 6$, $AC = 5$, $CC_1 = 12$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



РЕШЕНИЕ:

а) В плоскости BCC_1 продолжим прямую CM до пересечения с прямой BB_1 в точке К. Так как М – середина ребра B_1C_1, то прямоугольные треугольники CC_1M и KB_1M равны ($C_1M = B_1M$, $\angle CMC_1 = \angle KMB_1$ вертикальные). Тогда $B_1K = CC_1$. Плоскость CMA_1 пересекается с плоскостью ABB_1 по прямой A_1K. При этом $A_1K \parallel AB_1$. Следовательно, прямая AB_1 параллельна плоскости CMA_1, так как параллельна прямой A_1K, лежащей в плоскости CMA_1. Доказано.

б) В плоскости ABC проведем среднюю линию OK параллельно стороне AB. Тогда $OK \perp AC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $SK \perp AC$. А величина угла между плоскостями SAC и ABC равна величине угла SKO.

Рассмотрим пирамиду A_1B_1MK. Плоскость A_1MK совпадает с плоскостью CMA_1, значит требуется найти расстояние от точки B_1 до плоскости A_1MK.

Основание пирамиды A_1B_1M – прямоугольный треугольник с прямым углом M (A_1M является медианой, высотой равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$), KB_1 перпендикуляр к плоскости основания A_1B_1M.

B_1M – перпендикулярная проекция наклонной KM на плоскость A_1B_1M,

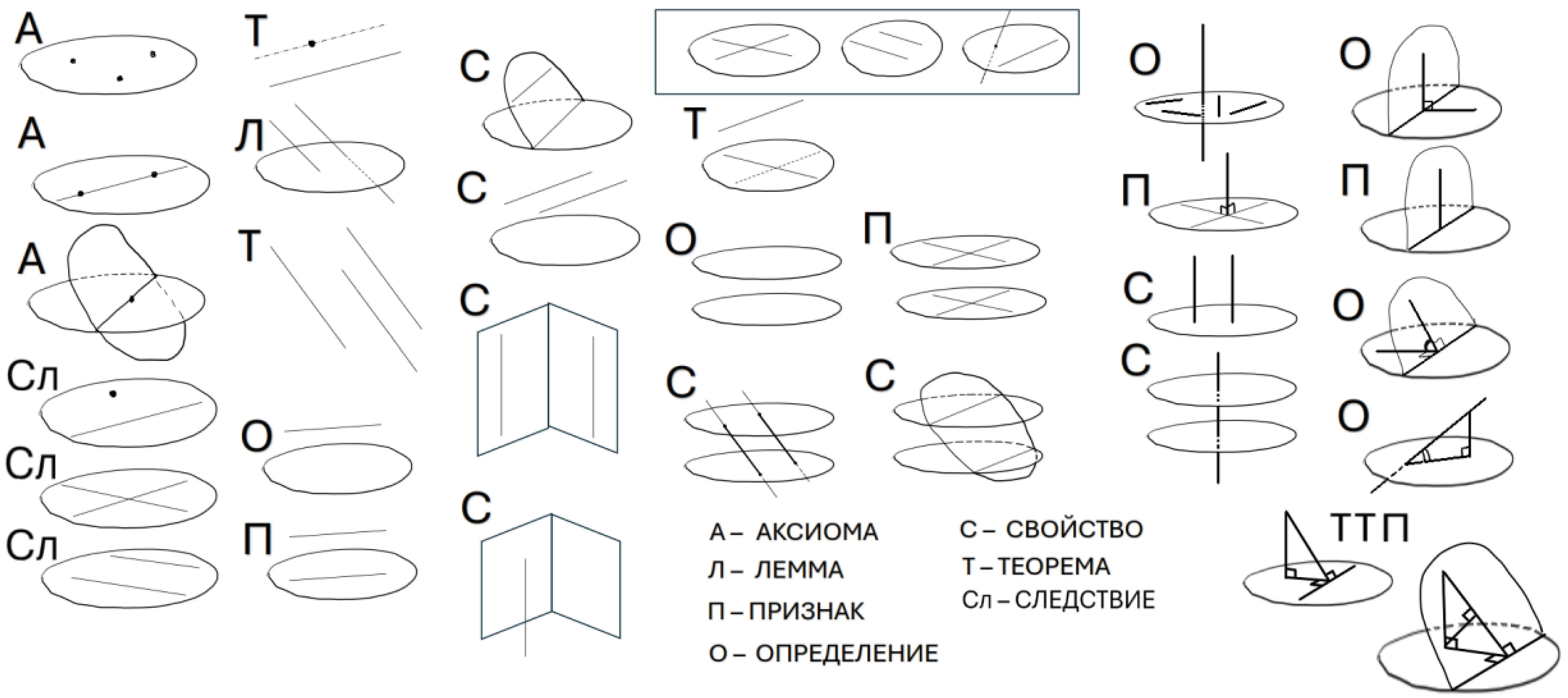
$B_1M \perp A_1M$. По теореме от трех перпендикулярах $KM \perp A_1M$. Следовательно, A_1M перпендикулярна плоскости B_1MK. Проведем B_1H высоту в треугольнике B_1MK. Тогда $B_1H \perp KM$ и $B_1H \perp A_1M$. Следовательно, B_1H – перпендикуляр к плоскости A_1MK.

$B_1M = \frac{1}{2}B_1C_1 = 3$, $B_1K = BB_1 = 12$, $KM = \sqrt{B_1M^2 + B_1K^2} = 3\sqrt{17}$.

$B_1H = \frac{B_1M \cdot B_1K}{KM} = \frac{3 \cdot 12}{3\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}}$.

ОТВЕТ: $\frac{12}{\sqrt{17}}$.

ВАЖНЫЕ СВЕДЕНИЯ КУРСА «СТЕРЕОМЕТРИЯ»



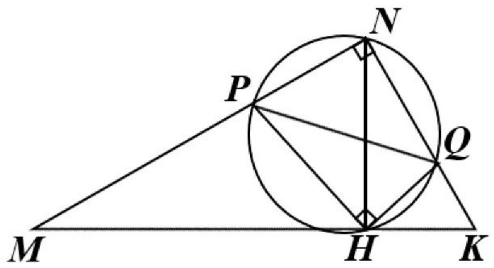
№17.1 Отрезок NH — высота прямоугольного треугольника MNK с прямым углом N. На катетах NK и MN выбраны точки Q и P соответственно такие, что $\angle PHQ = 90^0$.

а) Докажите, что треугольник PQH подобен треугольнику MNK.

б) Найдите NQ, если $KN = 4, MN = 8, PN = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

РЕШЕНИЕ:



а) Заметим, что в четырёхугольнике $PNQH$ сумма углов PNQ и PHQ равна 180^0. Значит около него можно описать окружность. Углы QPH и QNH равны как вписанные, опирающаяся на одну и ту же дугу. С другой стороны, угол NMK равен углу KNH, так как $\angle NMK = 90^0 - \angle MKN = \angle KNH$. Тогда прямоугольные треугольники MNK и PHQ подобны по острому углу. Доказано.

б) В треугольнике MNK по теореме Пифагора $MK^2 = MN^2 + NK^2 = 64 + 16 = 80$,

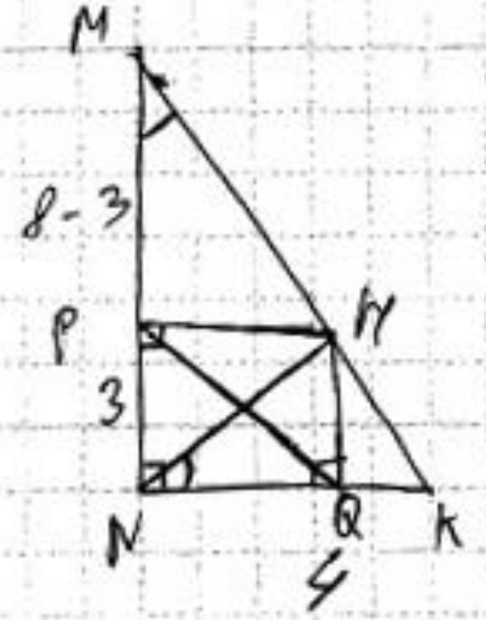
$MK = 4\sqrt{5}$, $cos\ \angle KMN = \frac{2}{\sqrt{5}}$. По соотношениям в прямоугольном треугольнике MNK

$MN^2 = MH \cdot MK$, значит $MH = \frac{64}{4\sqrt{5}}$; $MP = MN - PN = 8 - 3 = 5$. По теореме косинусов для треугольника MPH: $PH^2 = 25 + \frac{256}{5} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{16}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{61}{5}$.

Тогда $PQ^2 = \frac{PH^2}{cos^2\ KMN} = \frac{61}{5} : \frac{4}{5} = \frac{61}{4}$. Далее, по теореме Пифагора для треугольника PQN $NQ^2 = PQ^2 - PN^2 = \frac{61}{4} - 9 = \frac{25}{4}$. Тогда $NQ = \frac{5}{2}$. ОТВЕТ: $\frac{5}{2}$

№ 17

а)



$\triangle NHK \sim \triangle MNK$ по 2-м углам, $\angle K$ - общ.

и $\angle NHK = \angle MNK = 90°$, тогда $\angle HNK = \angle NMK$

Т.к. в четырёхугольнике $PHQN$ $HQ \perp QN$

$QN \perp NP$ и $NP \perp PH$, $PHQN$ - прямоугольник

тогда, $PQ = HN$ как диагонали, а

$NQ = PH$ и NQ - общ. тогда $\triangle PHQ =$

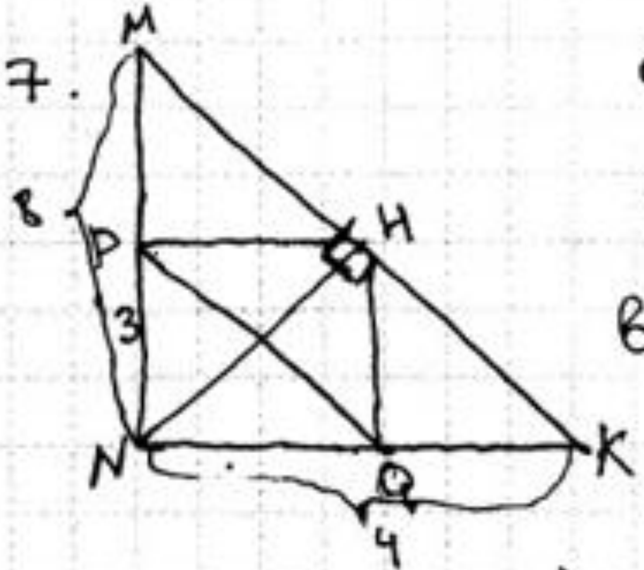
$= \triangle NHQ$ по 3-м сторонам

Т.к. $\triangle NHQ \sim \triangle MNK$ по 2-м углам ($\angle HNK = \angle NMK$ и

$\angle HQN = \angle MNK = 90°$) и $NHQ = \triangle PHQ$, $\triangle PHQ \sim$

Нет верного доказательства пункта а)
0 баллов

№ 17.



а) Рассмотрим $\triangle PQH$ и $\triangle MNK$.

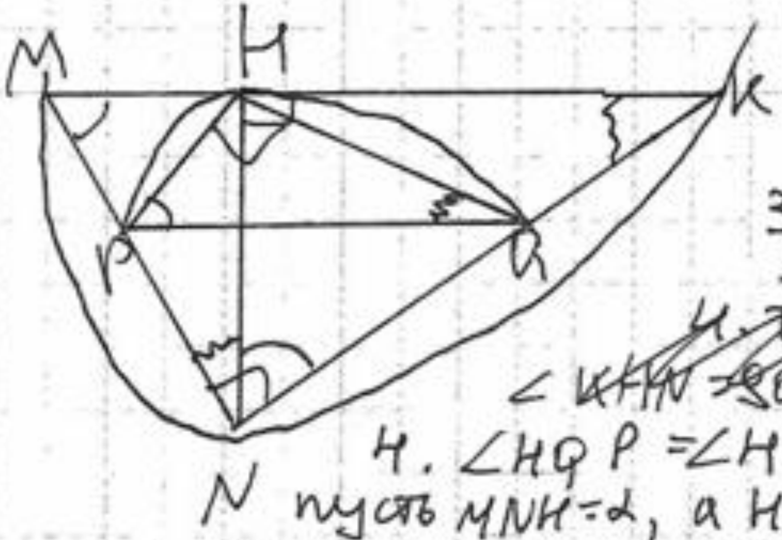
Сторона PH в $\triangle PQH$ является также и средней линией в $\triangle MNK$. Также оба данных треугольника являются прямоугольными (так как по условию $\angle PHQ = 90^\circ$, и $\angle N = 90^\circ$).

б) По Т Пифагора $MK = \sqrt{\cancel{MK}\ KN^2 + MN^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$.

Так как NH-высота, то она делит сторону MK на две части MK =?

Нет верного
доказательства пункта а)
0 баллов

(7)



а) 1. т.к. $\angle MNK = 90^\circ \Rightarrow MK$ - диаметр

2. т.к. $\angle PHQ = 90^\circ \Rightarrow PQ$ - диаметр

3. $\angle HPQ = \angle HNQ$ т.к. они опир. на одну дугу HQ

~~4. т.к. рас. $\triangle HNK$: $\angle KHN = 90^\circ$, $\angle 1$~~

4. $\angle HQP = \angle HNP$, т.к. они опир. на дугу PH

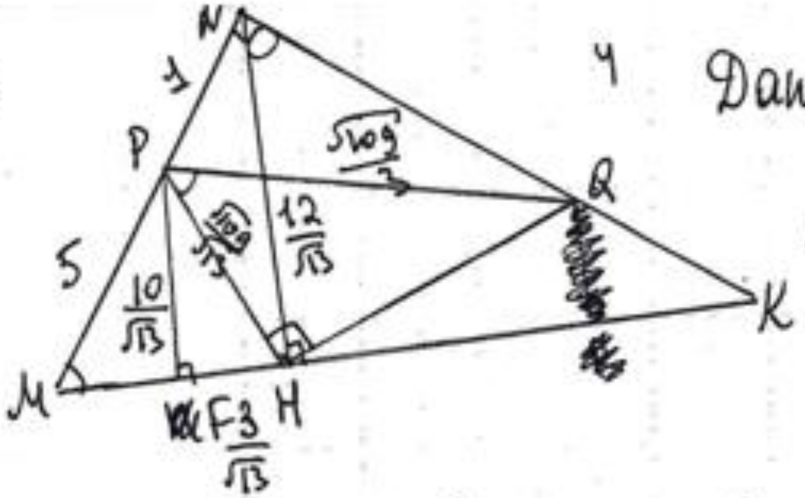
пусть $MNH = \alpha$, а $HNK = \beta$

5. $\angle HMN = 90^\circ - \alpha$, $\angle HKN = 90^\circ - \beta$

Нет верного обоснования ключевого момента: что точки P, N, Q и H лежат на одной окружности

0 баллов

17



Дано: $\triangle MNK$ – прямоуг; $\angle N = 90^\circ$; NH – высота

$\angle PHQ = 90^\circ$; $KN = 4$; $MN = 6$; $PN = 1$.

Д-ть: $\triangle PQH \sim \triangle MNK$

Найти NQ

Д-во: 1) $PNQH$ – вписанный четырехугольник по признаку, т.к. $\angle N + \angle H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ по св-ву впис. четырехуг. $\angle HPQ = \angle HNQ$ (опираются на одну дугу в опис. окр)

2) $\triangle NHK$: $\angle HNK = 90^\circ - \angle NKH$; $\triangle NMK$: $\angle NMK = 90^\circ - \angle NKM$

$\Rightarrow \angle HNK = \angle NMK$, т.к. $\angle HPQ = \angle HNK$ и $\angle HNK = \angle NMK$ $\Rightarrow \angle HPQ = \angle NMK$

3) $\triangle PHQ \sim \triangle MNK$ по острому углу (т.к. один угол $= 90^\circ$ – то по 2-м углам)

Верное доказательство пункта а)
1 балл

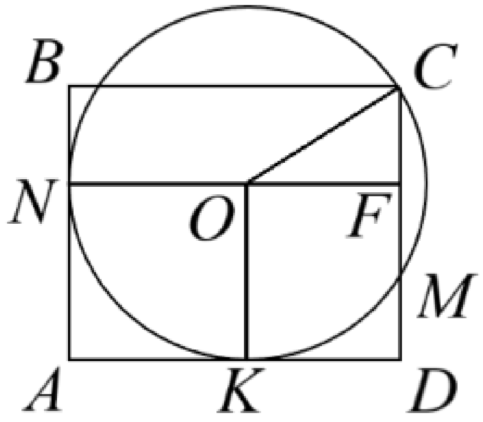
№17.2 Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на окружности, которая также пересекает сторону CD в точке M и касается сторон AB и AD в точках N и K соответственно.

а) Докажите, что угол CKD равен углу KMD.

б) Найдите длину стороны AB, если известно, что $AD = 8$, $DM = 1$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

РЕШЕНИЕ:



а) Рассмотрим углы MKD и KCM.

Угол MKD измеряется половиной дуги KM, так как это угол между касательной KD и хордой KM, проведенной в точку касания. Угол KCM измеряется половиной дуги KM, так как это вписанный угол.

Следовательно, $\angle MKD = \angle KCM$.

Рассмотрим треугольники KDM и CKD. Они прямоугольные и имеют соответственно равные углы $\angle MKD = \angle KCD$. Значит, $\angle KMD = 90^0 - \angle MKD = 90^0 - \angle KCD = \angle CKD$. Доказано.

б) Проведем радиусы OC, OK, ON и продолжим ON до пересечения с CD в точке F.

$ANOK$ – квадрат, а NF перпендикулярно CD, так как NF перпендикулярно AB.

Заметим, что точка F – середина CM. (Перпендикуляр из центра окружности к хорде делит ее пополам.)

Пусть $CF = FM = x$, тогда $FD = OK = AK = OC = x + 1$. $OF = KD = AD - AK = 8 - (x + 1) = 7 - x$.

Для треугольника OCF справедлива теорема Пифагора: $OC^2 = OF^2 + CF^2$. Составим и решим уравнение: $(x + 1)^2 = (7 - x)^2 + x^2$;

$x^2 - 16x + 48 = 0$; $x = 4$ или $x = 12$. Корень $x = 12$ посторонний, так как в этом случае окружность касается продолжения стороны AD за точку D, что не соответствует условию задачи.

Значит, $x = 4$, $AB = CD = CF + MD = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. ОТВЕТ: 9.

ОСОБЕННОСТИ ПУНКТА (а) ЗАДАНИЯ № 17

В большинстве заданий решение пункта *а* сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

а) подобия указанных треугольников;

б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;

в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;

г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:

- треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
- четырехугольник является описанным (четыре точки лежат на одной окружности) или вписанным;
- четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
- точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
- прямая содержит указанные точку или отрезок.

ОСОБЕННОСТИ ПУНКТА (б) ЗАДАНИЯ № 17

1. Для выполнения второго пункта задачи на нахождение требуемых величин в заданной геометрической фигурации нужно помнить основные формулы для вычисления соответствующих элементов:

а) для линейных – это теоремы: Пифагора, косинусов, синусов, о секущих и касательных, о хордах; формулы: длины медианы, биссектрисы и т.д.;

б) для угловых – это теоремы: косинусов, синусов, об измерении углов, связанных с окружностью (центральных, вписанных, не вписанных, между хордой и касательной) и т.д.;

в) для площадей – это теоремы: об отношении площадей: – подобных фигур; – фигур, имеющих равные элементы; формулы вычисления площадей треугольника и многоугольников, круга и его частей и т.д.

г) отношений отрезков или площадей фигур – это теоремы: Фалеса, о пропорциональных отрезках, о метрических соотношениях в треугольнике и круге, об отношении соответствующих элементов подобных фигур и т.д.

2. Может оказаться, что пункт *б* задания 16 может быть выполнен без использования свойства, сформулированного в пункте *а*.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ