Особенности преподавания учебного предмета «Математика» в рамках подготовки к ГИА-11 в 2024 году

Подолян Елена Вячеславовна,
к.п.н., доцент кафедры инженерной математики НГТУ , председатель предметной комиссии Новосибирской области

Новосибирск 2023

Количество участников ЕГЭ

	2021 год		2022 год		2023 год	
	Число участников	% от общего числа	Число участников	% от общего числа	Число участников	% от общего числа
Матем. профиль	7909	55,16	6130	39,74	6062	41,79
Матем. база	-	-	8480	54,98	7992	55,09

Базовый уровень	Субъект Российской Федерации	
	2022 г.	2023 г.
«2»	3,3	1,45
«3»	20,7	23,89
«4»	40,9	44,64
«5»	35,1	30,02
Средний балл	4,1	4,03

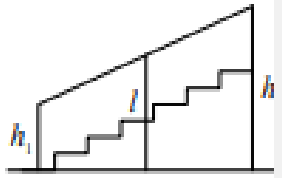
Шкала перевода

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Балл	0-6	7-11	12-16	17-21

Затруднения при выполнении заданий на экзамене базового уровня сложности (ниже 50%)

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания	В группе, получивших отметку «3»	В группе, получивших отметку «4»	В группе, получивших отметку «5»
10	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	42,71	80,43	96,99
11		15,40	43,97	89,65
12		4,68	42,28	90,75
13		0,89	7,98	55,85

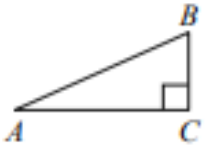
10 Перила лестницы дачного дома для надёжности укреплены посередине вертикальным столбом. Найдите высоту l этого столба, если наименьшая высота h_1 перил равна 2 м, а наибольшая высота h_2 равна 3 м. Ответ дайте в метрах.



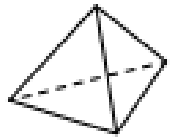
11 Высота бака цилиндрической формы равна 50 см, а площадь его основания равна 160 квадратным сантиметрам. Чему равен объём этого бака (в литрах)? В одном литре 1000 кубических сантиметров.



12 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=10$, $AC=\sqrt{91}$. Найдите $\sin A$.



13 Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 10, а боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Затруднения при выполнении заданий на экзамене базового уровня сложности (ниже 50%)

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания	В группе, получивших отметку «3»	В группе, получивших отметку «4»	В группе, получивших отметку «5»
14	Уметь выполнять вычисления и преобразования	22,69	67,24	93,47

14 Найдите значение выражения $1-\frac{1}{3}\cdot 1{,}2$.

Затруднения при выполнении заданий на экзамене базового уровня сложности (ниже 50%)

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания	В группе, получивших отметку «3»	В группе, получивших отметку «4»	В группе, получивших отметку «5»
16	Уметь выполнять вычисления и преобразования	34,30	75,57	96,73
17	Уметь решать уравнения и неравенства	21,15	69,40	96,06
18	Уметь решать уравнения и неравенства	8,83	22,74	70,95

Затруднения при выполнении заданий на экзамене базового уровня сложности (ниже 50%)

16 Найдите значение выражения $\frac{3^5}{3^3 \cdot 3}$.

17 Решите уравнение $x^2 + 6 = 5x$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

18 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\frac{x}{x-1} < 0$	1) $(1; +\infty)$
Б) $2^{-x} > 2$	2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$
В) $\frac{1}{x(x-1)} > 0$	3) $(-\infty; -1)$
Г) $\log_2 x > 0$	4) $(0; 1)$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания	В группе, получивших отметку «3»	В группе, получивших отметку «4»	В группе, получивших отметку «5»
19	Уметь выполнять вычисления и преобразования	4,74	25,50	74,39
20	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	1,78	9,52	53,22
21	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	6,69	21,82	63,83

19 Найдите четырёхзначное число, кратное 15, произведение цифр которого больше 0, но меньше 25. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

20 Смешали 4 кг 40-процентного раствора вещества с 10 кг 5-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация

21 Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме. если всего в нём 110 квартир?

№ задания 2023 г./ % выполнения	Характеристика	№ задания 2022 г. / % выполнения	Содержательные особенности задания в 2023 г./2022 г.
4/93,32	Задача физического содержания на подстановку в готовую формулу	8/89,96	Выражение параметра из линейной зависимости/нахождение величины по произведению, содержащему степень с целым показателем
7/94,6	Чтение графика	14/82,39	Задача практического содержания на соответствие интервалу времени характеристики температуры/нахождение соответствия между графиками и характеристиками функций на отрезке
10/75,55	Геометрическая практического содержания	10/79,05	Нахождение средней линии трапеции/вычисление периметра прямоугольника
12/48,04	Геометрическая (планиметрия)	15/60,29	Нахождение тригонометрической функции острого угла в прямоугольном треугольнике/нахождение длины биссектрисы угла треугольника

№ задания 2023 г./ % выполнения	Характеристика	№ задания 2022 г. / % выполнения	Содержательные особенности задания в 2023 г./2022 г.
13/21,1	Геометрическая (стереометрия)	13/47,95	Нахождение площади боковой поверхности пирамиды/нахождение объема правильной четырехугольной призмы
16/71,43	Нахождение значения выражения	7/64,22	Вычисление степеней с натуральными показателями/вычисление степеней с целыми показателями
17/65,47	Квадратное уравнение	9/72	Полное квадратное уравнение/неполное квадратное уравнение
18/34,24	Неравенства	17/30,02	Дробно-рациональное, показательное, логарифмическое неравенства/показательные неравенства с различными основаниями
20/21,16	Текстовая задача	20/7,67	Задача на концентрацию/нахождение средней скорости двух величин

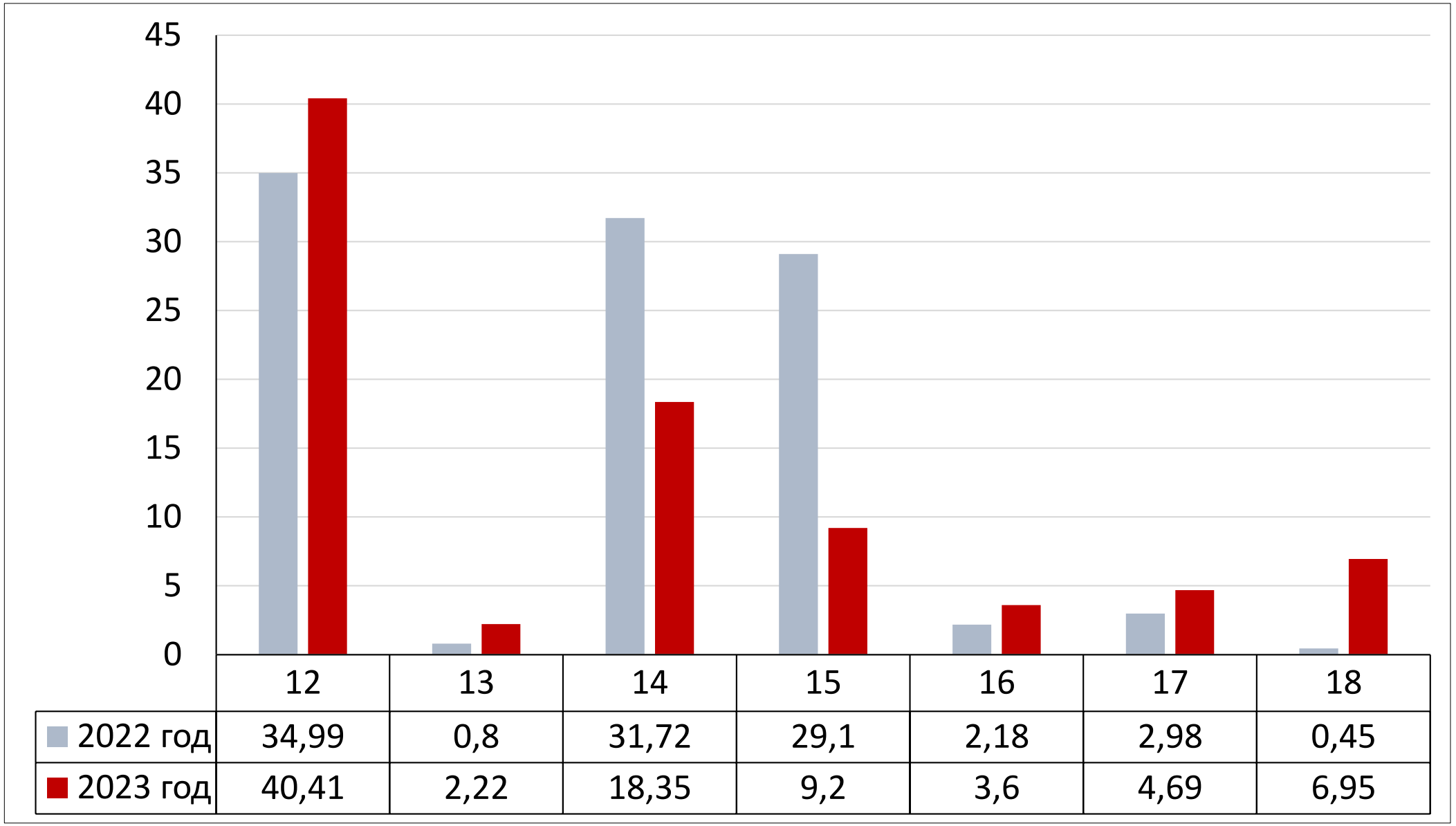
Динамика результатов ЕГЭ по предмету

Профильный уровень	Субъект Российской Федерации		
	2021 г.	2022 г.	2023 г.
Не преодолели минимального балла, %	5,6	8,54	7,18
Средний тестовый балл	56,59	54,24	54,44
Получили от 81 до 99 баллов, %	8,54	3,96	3,77
Получили 100 баллов, чел.	7	10	2

Затруднения при выполнении заданий на экзамене профильного уровня сложности (Б-ниже 50%, П и В-ниже 15%)

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания/уровень сложности	Средний процент выполнения	№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания/уровень сложности	Средний процент выполнения
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	2,22	16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	3,60
14	Уметь решать уравнения и неравенства	18,35	17	Уметь решать уравнения и неравенства	4,69
15	Уметь использовать приобретённые знания и умения в повседневной практической деятельности и жизни	9,20	18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	6,95

Процент верно выполненных заданий части 2 по годам



	12	13	14	15	16	17	18
2022 год	34,99	0,8	31,72	29,1	2,18	2,98	0,45
2023 год	40,41	2,22	18,35	9,2	3,6	4,69	6,95

Изменения в КИМ ЕГЭ 2024 года по математике (профильный уровень)

В первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами (код 13 по перечню проверяемых требований к предметным результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования; код 7.5 по перечню элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ по математике).

Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы увеличен с 31 до 32.

Спецификация КИМ для проведения в 2024 году ЕГЭ по математике (профильный уровень)

	Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания	Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания
1 часть (задания с кратким ответом)	1	Б	1	7	Б	1
	2	Б	1	8	П	1
	3	Б	1	9	П	1
	4	Б	1	10	П	1
	5	П	1	11	П	1
	6	Б	1	12	П	1

Спецификация КИМ для проведения в 2024 году ЕГЭ по математике (профильный уровень)

	Номер задания	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания
2 часть (задания с развернутым ответом)	13	П	2
	14	П	3
	15	П	2
	16	П	2
	17	П	3
	18	В	4
	19	В	4

Задание №2 по геометрии

Проверяет умение оперировать понятиями: **вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами.**

Если вектор $\vec{a}$ *плоскости* имеет координаты $(x_1; y_1)$, а вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(x_2; y_2)$ то:	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2)$ $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2; y_1-y_2)$ $k\vec{a}=(kx_1; ky_1),\ k\in R$ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha x_1+\beta x_2; \alpha y_1+\beta y_2),\quad \alpha,\beta\in R$ $\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
Длина вектора в координатах на плоскости.	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, где $\vec{a}(x_1; y_1)$
Угол между двумя векторами на плоскости.	$\angle(\vec{a},\vec{b})=\arccos\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, где $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$

Ошибки при выполнении заданий с развернутым ответом профильного уровня сложности

Задание 12 (13).

а) Решите уравнение $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Ошибки при выполнении заданий с развернутым ответом профильного уровня сложности

Пример 1.

№ 12

$2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 2\sin x$

$2\sin^3 x - 2\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$-2\sin x(1 + \sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$-2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

Пример 2.

$2\sin^3 x - \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) - 2\sin x = 0$

$2\sin^3 x - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x = 0$

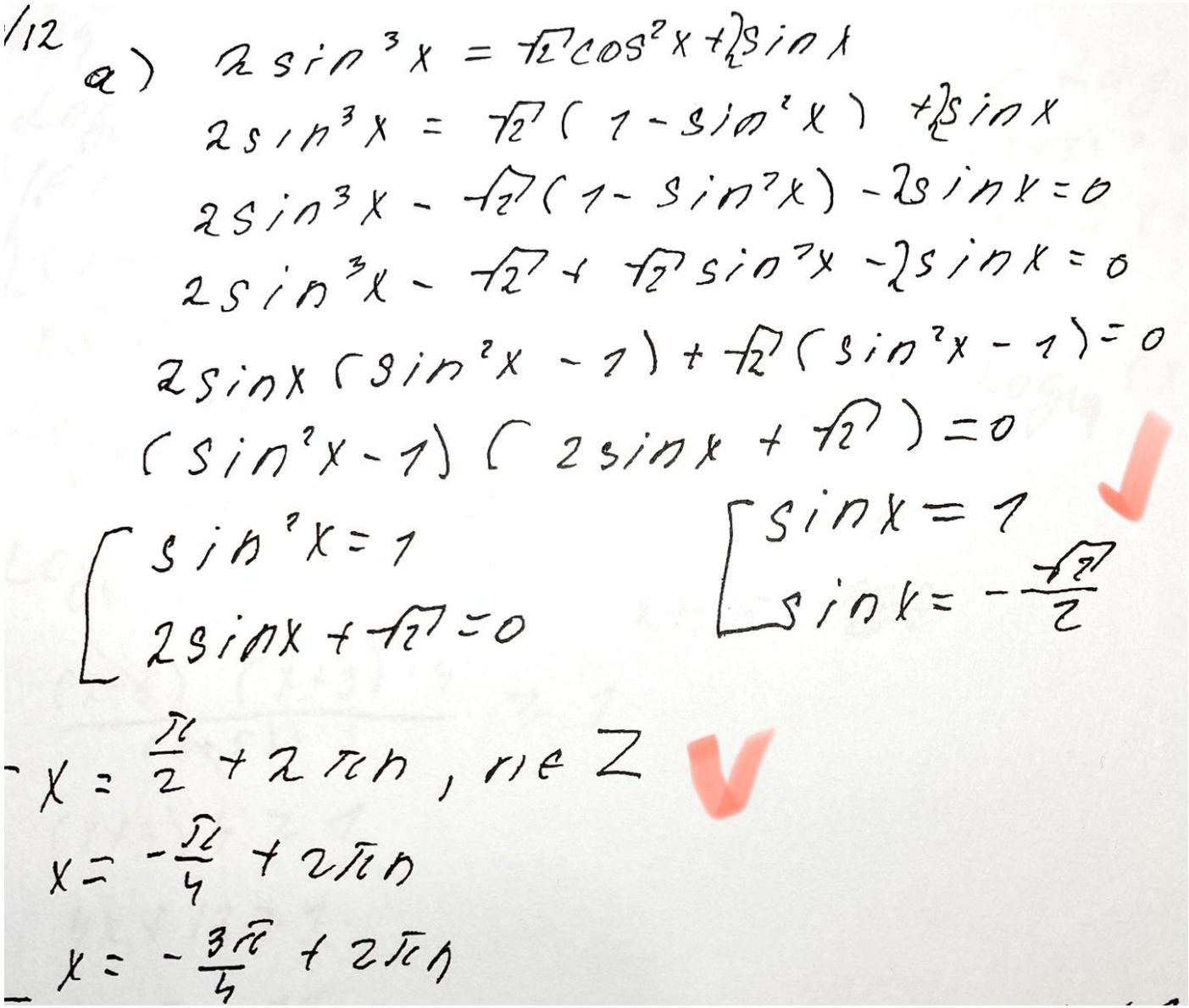
$2\sin x(\sin^2 x - 1) + \sqrt{2}(\sin^2 x - 1) =$

$(\sin^2 x - 1)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 \\ 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

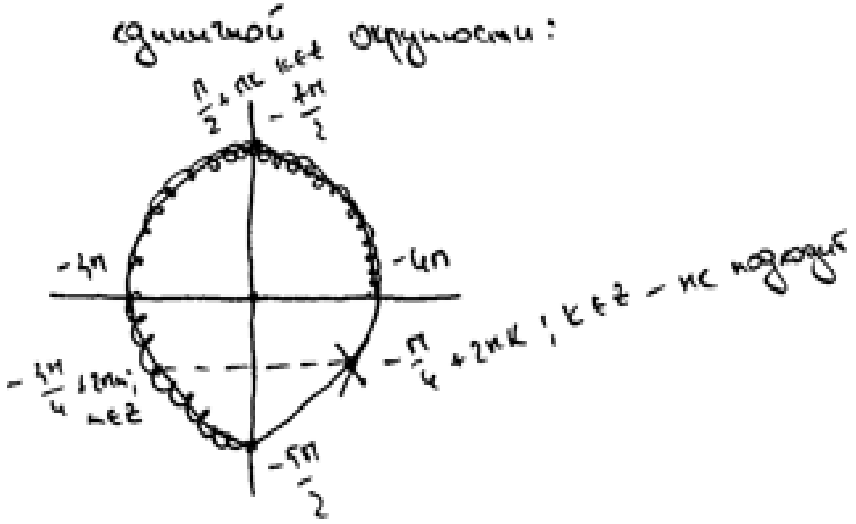
Пример 3.


12
а) $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$
$2\sin^3 x = \sqrt{2}(1-\sin^2 x) + 2\sin x$
$2\sin^3 x - \sqrt{2}(1-\sin^2 x) - 2\sin x = 0$
$2\sin^3 x - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x = 0$
$2\sin x(\sin^2 x - 1) + \sqrt{2}(\sin^2 x - 1) = 0$
$(\sin^2 x - 1)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$
$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 1 \\ 2\sin x + \sqrt{2} = 0\end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$
$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

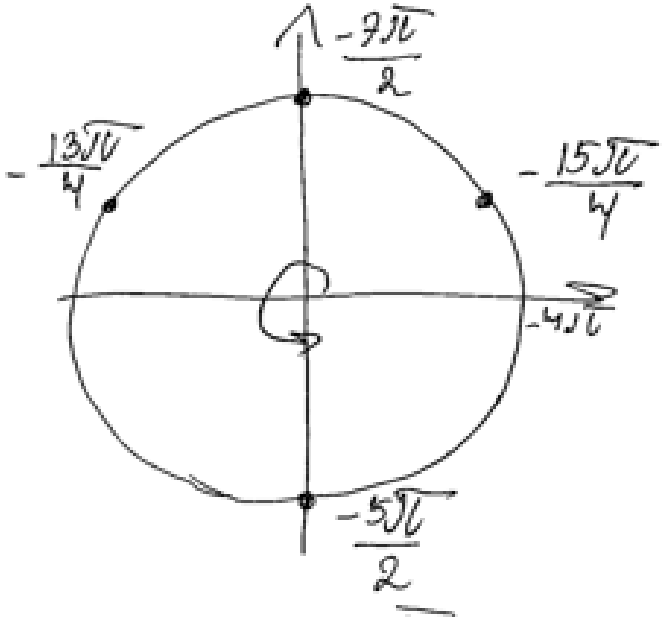
Ошибки при отборе корней

Пример 1.

Отберем корни [illegible] при которых $k \in [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$, с помощью единичной окружности:



Пример 2.



Ответ: $-\frac{15\pi}{4}; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}$

Способы отбора корней

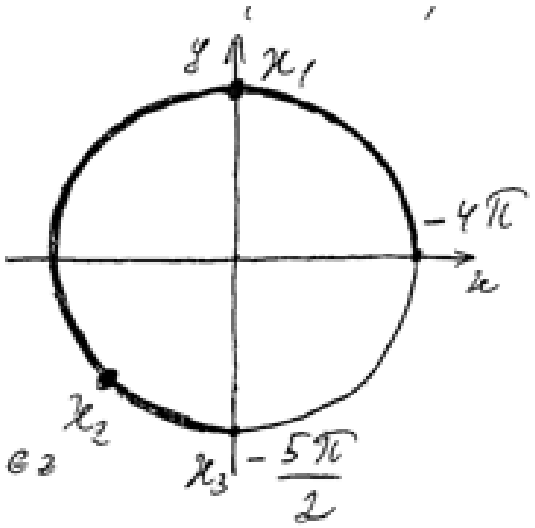
Пример 1.

б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$x_1 = -\frac{4\pi}{2}$

$x_2 = -\frac{11\pi}{4}$

$x_3 = -\frac{5\pi}{2}$

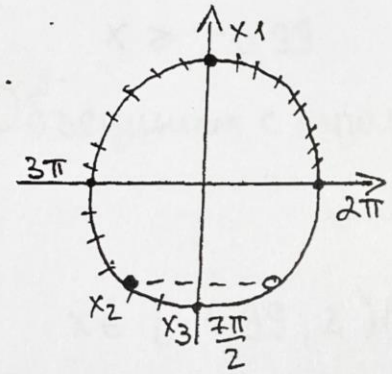


Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n; (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$

б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$

Пример 2.

б) Отберём корни на отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ с помощью числовой окружности



$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$x_3 = \frac{7\pi}{2}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z; -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z; -\frac{\pi}{3}+2\pi m, m \in Z; -\frac{2\pi}{3}+2\pi l, l \in Z.$

б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{10\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}.$

Способы отбора корней

Пример 3.

$2\sin x + \sqrt{2} = 0$

$2\sin x = -\sqrt{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, n \in Z$

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\sin^2 x - 1 = 0$

$\sin^2 x = 1$

$\sin x = \pm 1$

$x = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

б) Найдём все корни уравнения $\in [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$

1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $\quad [-\frac{16\pi}{4}; -\frac{10\pi}{4}]$

$n = 0;\ x = (-1)^1\frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}$ ∉ [ ].

$n = -1;\ x = (-1)^0\frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$ ∉ [ ].

$n = -2;\ x = (-1)^{-1}\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4}$ ∉ [ ].

$n = -3;\ x = (-1)^{-2}\frac{\pi}{4} - 3\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{12\pi}{4} = -\frac{11\pi}{4}$ ∈ [ ].

$n = -4;\ x = (-1)^{-3}\frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{16\pi}{4} = -\frac{17\pi}{4}$ ∉ [ ].

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $\left[-\frac{8\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$n = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$ ∉ [ ]

$n = -1;\ x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ ∉ [ ].

$n = -2;\ x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{2} = -\frac{7\pi}{2}$ ∉ [ ].

$n = -3;\ x = \frac{\pi}{2} - 6\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{12\pi}{2} = -\frac{11\pi}{2}$ ∉ [ ]

3. ~~$x = -\frac{\pi}{2} + 0$~~ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $\left[-\frac{8\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$n = 0;\ x = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ ∉ [ ].

$n = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2} \in [\ ]$.

$n = -2;\ x = -\frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}$ ∉ [ ]

Типичные ошибки в задании 12 (2023 г.):

- ***при выполнении тождественных преобразований в ходе решения уравнения;***
- ***при решении неполного квадратного уравнения;***
- ***в формулах для нахождения решения простейших тригонометрических уравнений;***
- ***отсутствие дуги при нахождении корней уравнения на заданном интервале;***
- ***вычислительные ошибки при отборе корней уравнения с помощью числовой окружности и решении двойных неравенств.***

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень (натуральный показатель), извлечение корня.

НЕ вычислительные ошибки

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{4}, \\ \cos x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sin^2 x = 1$$

$$\sin x = 1$$

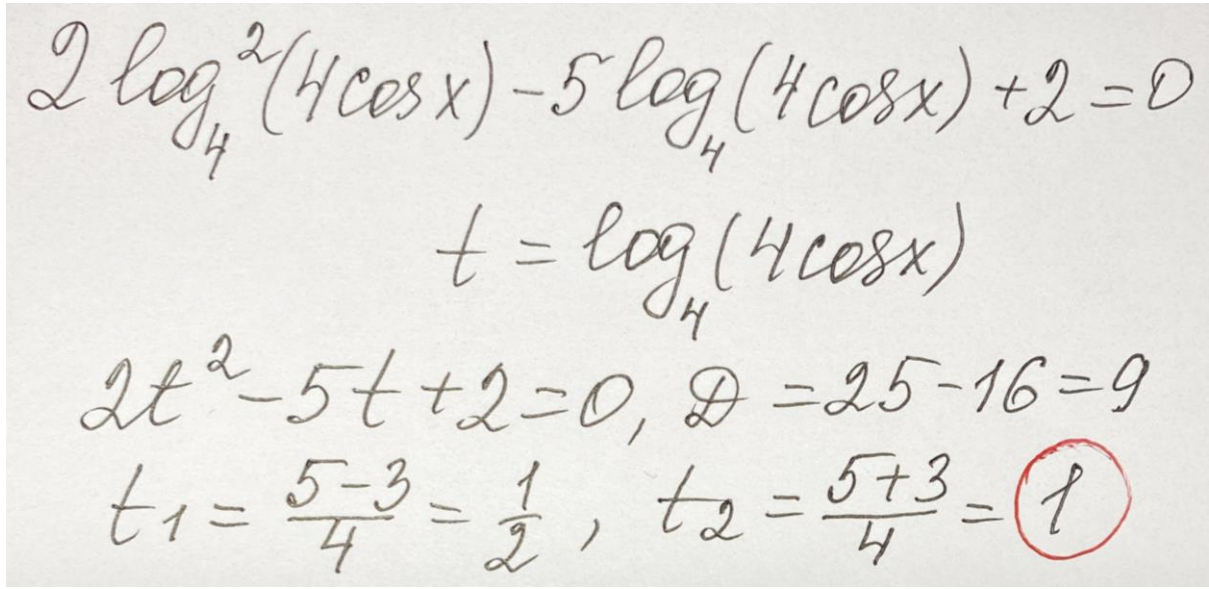
$$\cos x = 1$$

$$x = \pi + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Пример вычислительной ошибки



Задание 14 (15).

Решите неравенство

$$\log_4\left((x-5)\left(x^2-2x-15\right)\right)+1\geq 0{,}5\log_2(x-5)^2.$$

Ответ: $[-2{,}75;5);\ (5;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-2{,}75$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Ошибки при выполнении заданий с развернутым ответом профильного уровня сложности

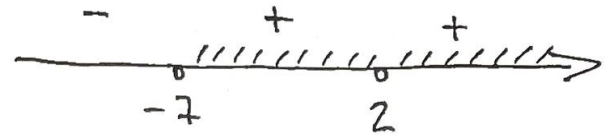
Пример 1.

14 $\log_{100}\left((x-2)(x^2+5x-14)\right)+1 \geq 0{,}5\log(x-2)^2$

Ограничение: $\begin{cases}(x-2)^2>0\\(x-2)(x^2+5x-14)>0\end{cases}$ $x\neq 2$

$(x-2)(x^2+5x-14)=(x-2)(x-2)(x+7)$

$(x-2)(x-2)(x+7)>0$



~~Объединим~~

$x\in(-7;2)\cup(2;+\infty)$

$\log_{100}((x-2)(x-2)(x+7))+1 \geq \frac{1}{2}\log_{10}(x-2)^2$

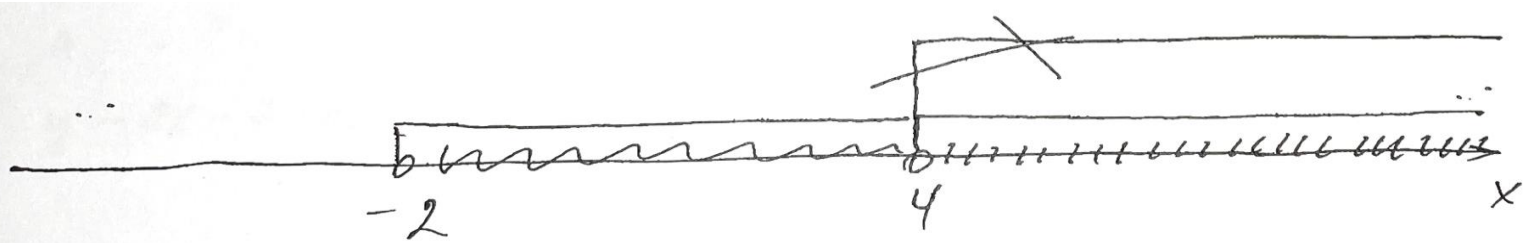
$\log_{100}(x-2)^2+\log_{100}(x+7)+1 \geq \log_{100}(x-2)^2$

$\log_{10}(x-2)+\log_{100}(x+7)+\log_{100}100-\log_{10}(x-2)\geq 0$

Пример 2.

$$((x-4)(x^2-2x-8)\cdot 25) \geq (x-4)^2$$
$$(x-4)(x+2)(x-4)\cdot 25 \geq x^2-8x+16$$
$$(x-4)^2(x+2)\cdot 25 \geq (x-4)^2$$
$$(x-4)^2(25x-50)-(x-4)^2 \geq 0$$
$$(x-4)^2(25x-50-1) \geq 0$$

Пример 3.



$x \in (-2;4) \cup (4;+\infty)$

$$\frac{1}{2}\log_5((x-4)(x^2-2x-8))+1 \geq \log_5|x-4|$$
$$\frac{1}{2}\log_5(x-4)+\frac{1}{2}\log_5(x^2-2x-8)+1-\log_5|x-4| \geq 0$$
$$\frac{1}{2}\log_5(x-4)+\frac{1}{2}\log_5((x-4)(x+2)(x-4))+1-\log_5|x-4| \geq 0$$

Пример 4.

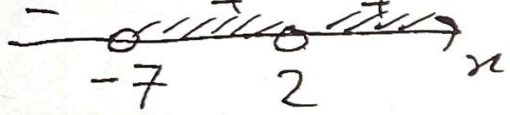
№ 14.

$$\log_{100}\left[(x-2)(x^2+5x-14)\right]+1\geq 0{,}5\lg(x-2)^2$$

область опр

$(x-2)(x^2+5x-14)>0$

$(x-2)^2(x+7)>0$



$\Rightarrow x\in(-7;+\infty)\setminus\{2\}$

преобразуем исходное неравенство:

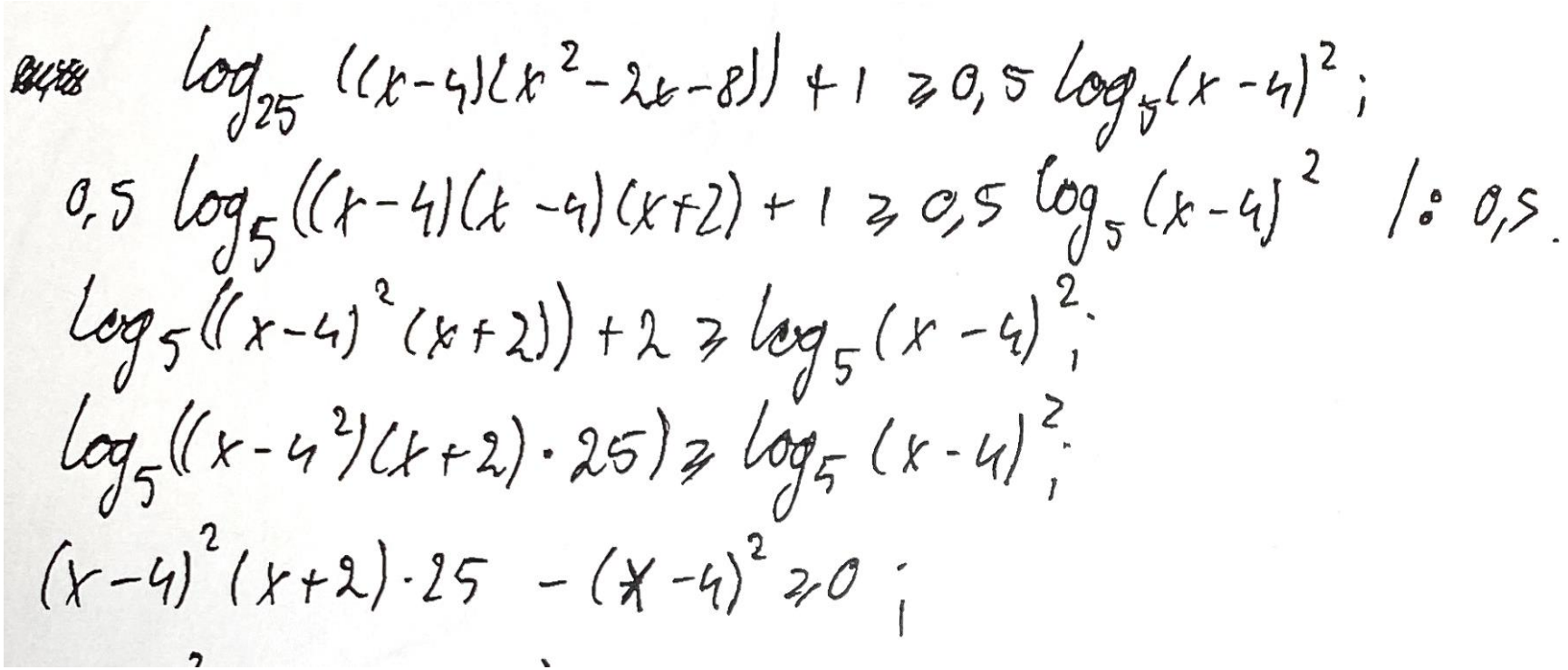
$$\lg\left[(x-2)(x^2+5x-14)\right]-\lg(x-2)^2+1\geq 0;\ 1=\lg 10$$

Типичные ошибки в задании 14 (2023 г.):

- *при нахождении ограничений для исходного логарифмического неравенства;*
- *при приведении к одному основанию логарифмов;*
- *при умножении обеих частей неравенства на числовой множитель;*
- *при смене знака при переносе слагаемого из одной части неравенства в другую;*
- *потеря модуля при преобразовании выражения четной степени под знаком логарифма в левой части исходного неравенства;*
- *при решении неравенства методом интервалов;*
- *при нахождении решений простейшего логарифмического неравенства;*
- *вычислительные ошибки.*

Возможные преобразования при выполнении задания №14 с развернутым ответом профильного уровня сложности

Пример 1.



Пример 2.

$$\log_4((x-5)(x^2-2x-15))+1 \geq \frac{1}{2}\log_2(x-5)^2$$

ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)(x^2-2x-15)>0\\(x-5)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 5\\x>-3\end{cases}$

$$\frac{1}{2}\log_2((x-5)^2(x+3))+1 \geq \frac{1}{2}\log_2(x-5)^2$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x-5)^2+\frac{1}{2}\log_2(x+3)+1 \geq \frac{1}{2}\log_2(x-5)^2$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x+3)+1\geq 0$$

Пример 3.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2+3x+2) - \log_3(x+4)$$

$$\log_3(5-5x) + \log_3(x+4) \geq \log_3(x^2+3x+2)$$

$$\log_3 5(1-x)(x+4) \geq \log_3(x-1)(x-2)$$

$$5(1-x)(x+4) \geq (x-1)(x-2)$$

$$(1-x)\cdot 6(x+3) \geq 0$$

Задания по геометрии с развернутым ответом
№ 13 (14), 16 (17)

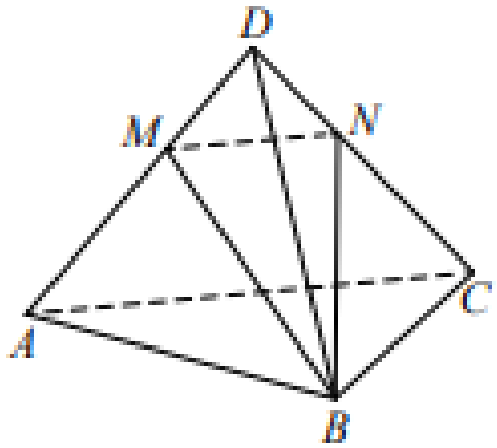
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Демонстрационный вариант 2024 г.

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $BD = CD$.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB.



Решение. а) Прямоугольные треугольники ABD и ACD равны, поскольку катет AD общий, а $AB = AC$. Значит, $BD = CD$.

б) Найдём боковые рёбра. Треугольник BCD – равнобедренный и прямоугольный, поэтому $BD = CD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 5$. Аналогично, $AD = 5$. Найдём стороны треугольника MNB:

$$MB = NB = \sqrt{ND^2 + DB^2} = \sqrt{29},$$

$$MN = \sqrt{MD^2 + DN^2} = 2\sqrt{2}.$$

Площадь равнобедренного треугольника MNB равна

$$\frac{1}{2} \cdot MN \cdot \sqrt{MB^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{6}$.

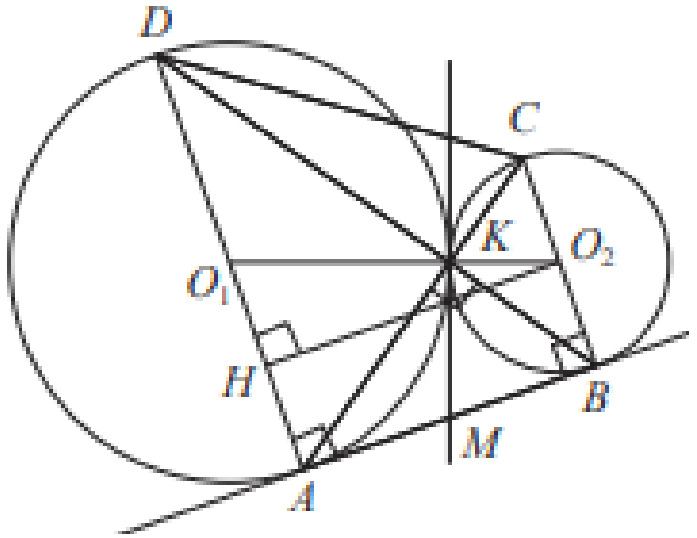
Демонстрационный вариант 2024 г.

17 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Демонстрационный вариант 2024 г.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC}=4$. Пусть $S_{BKC}=S$, тогда

$$S_{AKD}=16S.$$

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}}=\frac{DK}{KB}=\frac{AD}{BC}$, т.е. $S_{AKB}=4S$. Аналогично $S_{CKD}=4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H=\sqrt{O_1O_2^2-O_1H^2}=4.$$

Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB=20.$$

Следовательно, $25S=20$, откуда $S=0{,}8$ и $S_{AKB}=4S=3{,}2$.

Ответ: 3,2.

Необходимо знать при решении геометрических задач :

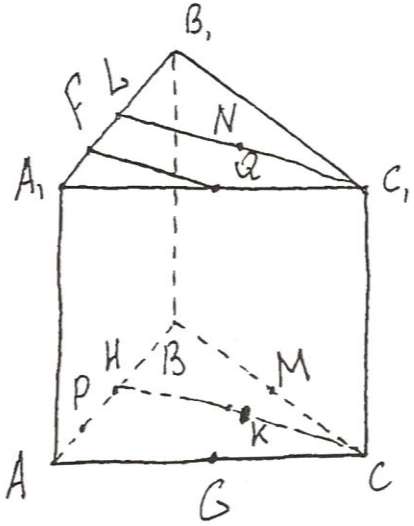
- *Признаки параллельности прямых и плоскостей*
- *Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей*
- *Теорему о трех перпендикулярах*
- *Построение перпендикуляра из горизонтальной плоскости к наклонной плоскости*

Необходимо знать при решении геометрических задач :

- *Соотношения в прямоугольном треугольнике*
- *Теорему синусов, теорему косинусов*
- *Теорему о биссектрисе угла треугольника*
- *Теоремы о высотах в треугольнике*
- *Теорему о касательной и секущей*
- *Теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма*
- *Замечательные точки треугольников*
- *Свойства вписанных и описанных углов и многоугольников*
- *Формулы площадей многоугольников*
- *Формулы объемов, площадей поверхностей многогранников и тел вращения*

Способы решения геометрических задач

13) а) $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. Пусть L – середина A_1B_1.



Пусть т $F \in A_1B_1$

Докажем, что $QF \perp A_1B_1$, т.к. $(ABB_1) \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow QF \perp (ABB_1)$

Заметим, что QF – средняя линия

$\triangle A_1C_1L \Rightarrow A_1F = \frac{1}{4} A_1B_1$.

$AP = \frac{1}{4} AB \Rightarrow FP \parallel AA_1$; $FP \perp AB$.

По т. о трёх перпендикулярах:

$QF \perp (ABB_1)$, $FP \perp AB \Rightarrow QP \perp AB \Rightarrow$

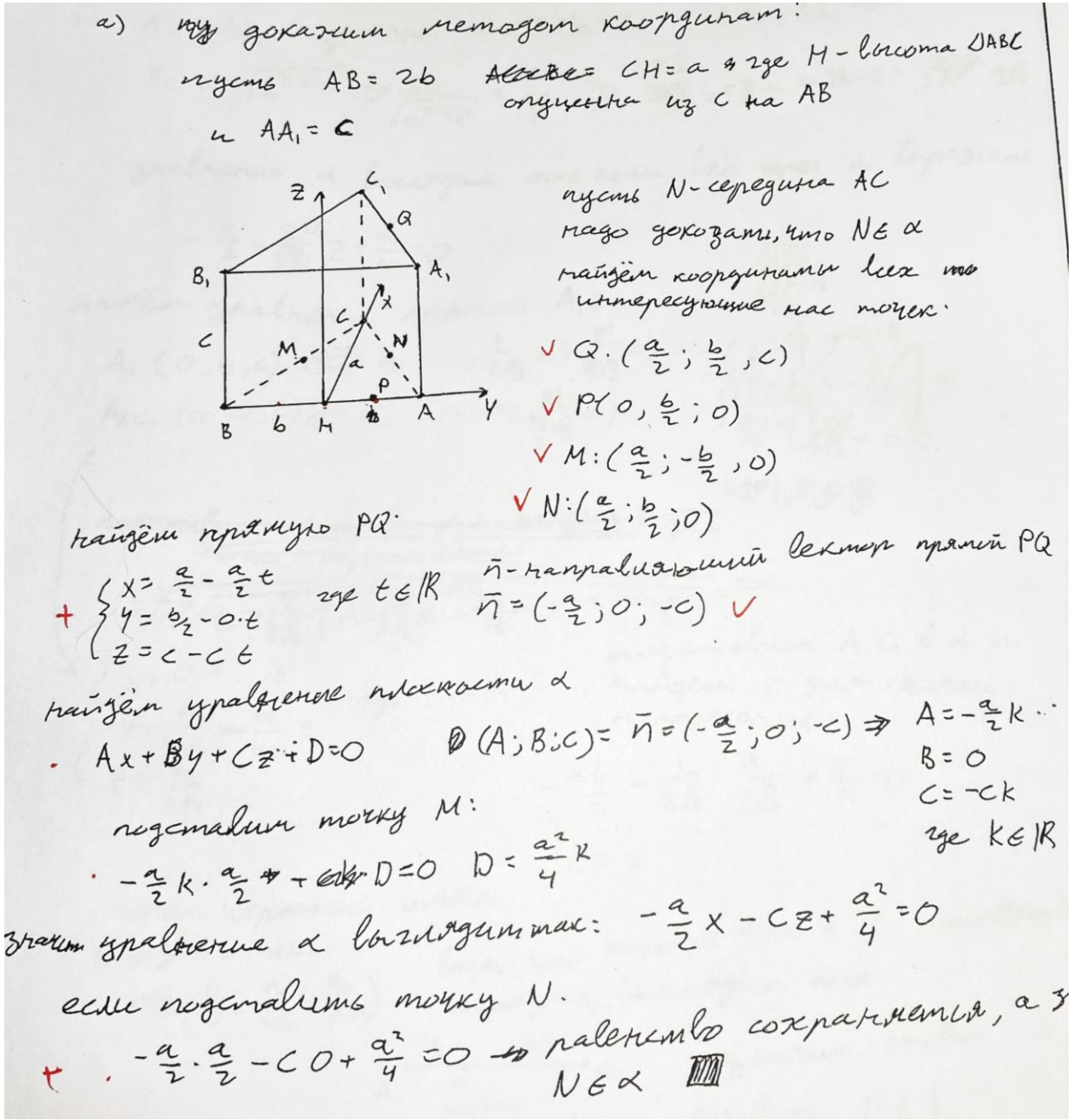
$\Rightarrow AB \parallel \alpha$. Пусть G – середина AC. MG – ср. линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow GM \parallel AB$; $AB \parallel \alpha$, $M \in \alpha \Rightarrow GM \subset \alpha$.

$G \in \alpha$.

ч.т.д.

Способы решения геометрических задач



Демонстрационный вариант 2024 г.

16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Типичные ошибки в задании 15 (2023 г.):

- *в неверной трактовке условия задачи;*
- *в записи переводного коэффициента отсутствует 0,01;*
- *в использовании равномерного остатка долга в течение всего срока кредитования;*
- *в формуле нахождения суммы арифметической прогрессии;*
- *вычислительные ошибки.*

Задание 17 (18).

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0,\\ y=ax-10\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=\frac{5}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ множества значений a, возможно, с включением граничной точки и/или исключением точки $a=0$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Способы решения:

– чисто алгебраический способ решения;

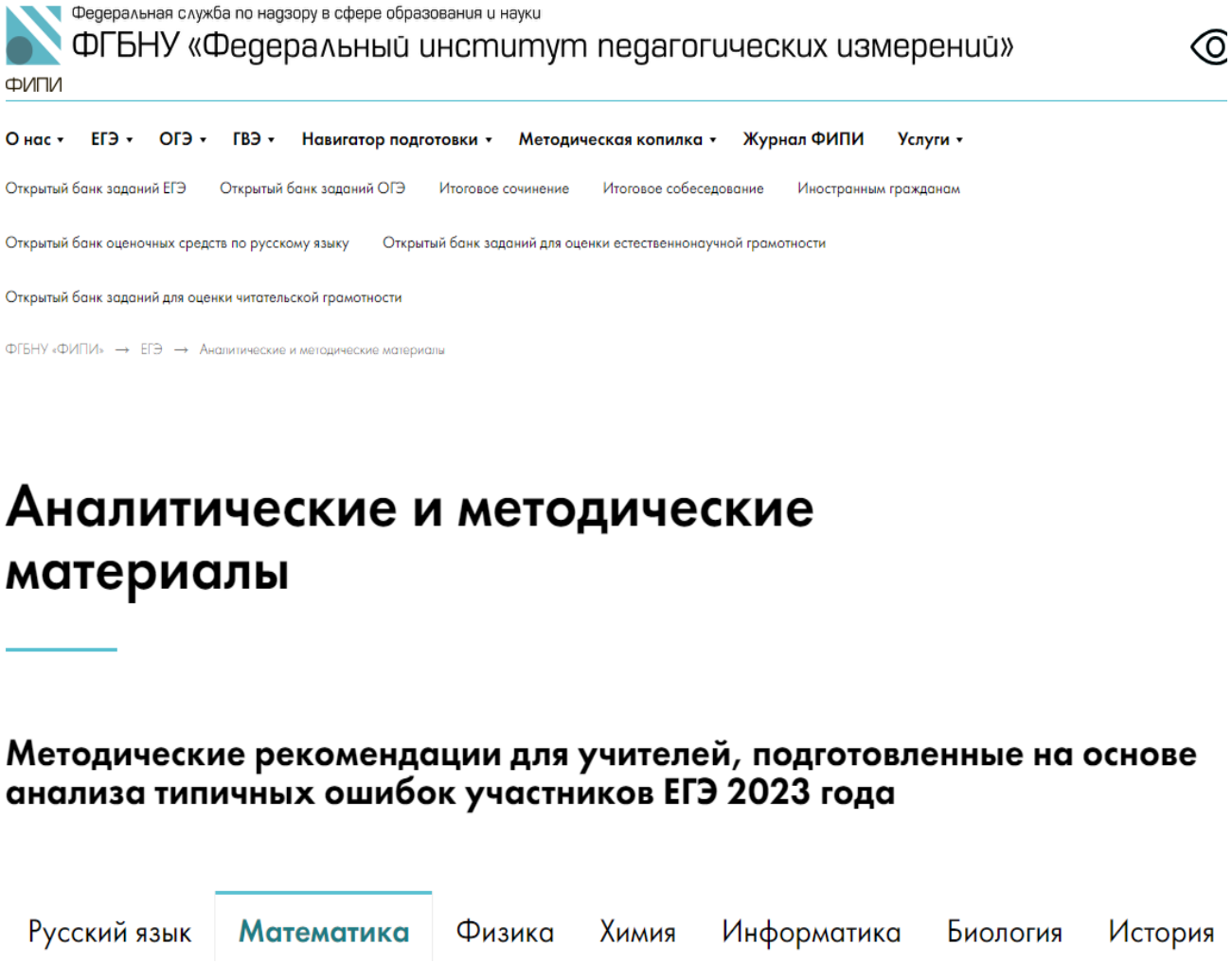
– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;

– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Общие рекомендации:

- **учитывать ограничения (четный корень, модуль, дробь) в уравнениях;**
- **при схематичном построении графиков функций указывать ключевые точки;**
- **изображать прямые, проходящие через фиксированную точку или параллельные прямые;**
- **уметь выделять полный квадрат, находить угловой коэффициент касательной, знать условие перпендикулярности прямых;**
- **уметь исследовать уравнение, содержащее параметр, которое может быть квадратным, вырождаться в линейное в зависимости от значения параметра.**

Материалы для подготовки обучающихся к ГИА

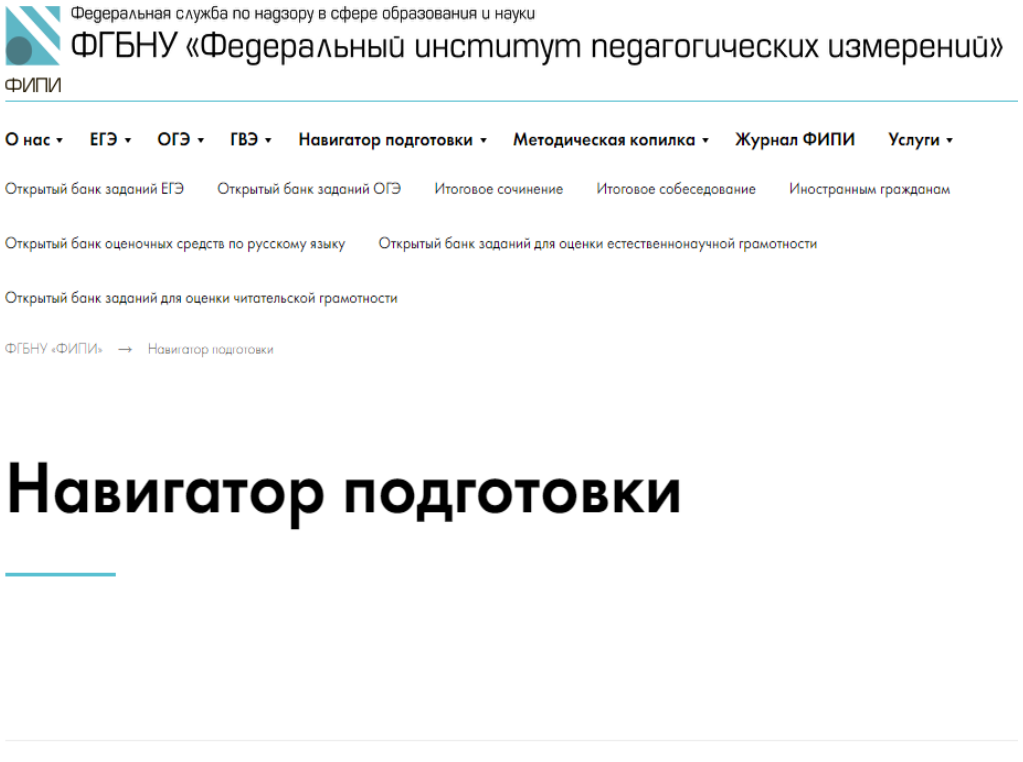


https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy#!/tab/173737686-2

Материалы для подготовки обучающихся к ГИА



https://ege.fipi.ru/bank/



https://fipi.ru/navigator-podgotovki

ПРОБЛЕМА

К сожалению, непреодолённой остаётся главная проблема: перекос в математической подготовке школьников в сторону решения большого количества тренировочных работ по специализированным сборникам или вариантам прошлых лет. Давая своим ученикам клонированные варианты один за другим, учитель добивается, как ему кажется, безусловного и безукоризненного выполнения работ почти всеми учащимися. У него создается ложное мнение, что школьники готовы к сдаче ЕГЭ, и похожее впечатление возникает у самих школьников и их родителей. Проблема в том, что, решая экзаменационные задачи предыдущих лет, школьник готовится *к прошлогоднему экзамену*, а не к предстоящему.

РЕШЕНИЕ

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь изучая математику во всём разнообразии её методов; необходимо уделять должное внимание развитию логики и математической речи, в том числе устной, а также умению выражать мысли на бумаге доходчиво, просто и доказательно. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ, сборники задач и вариантов, если их использовать как источник идей и для проверки собственных достижений, но не как коллекцию репетиционных материалов.