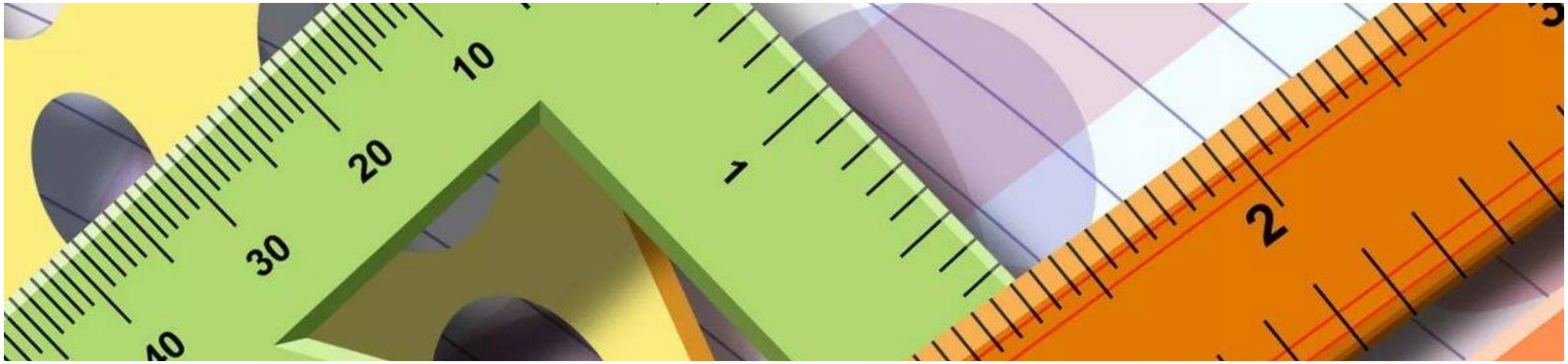
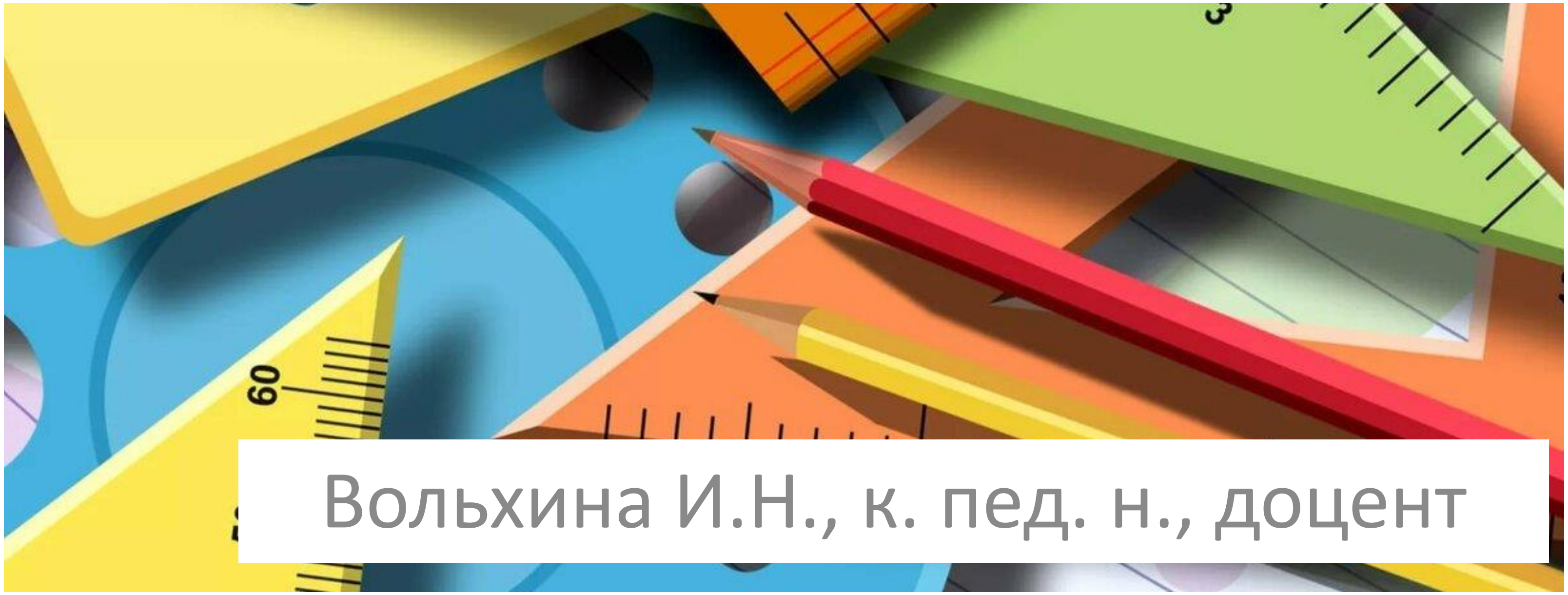


Обучение доказательствам



Вольхина И.Н., к. пед. н., доцент

ФГОС ООО (2021), Кодификатор ОГЭ

БУ: Предметные результаты

2) умение

- оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, **доказательство**;
- распознавать истинные и ложные высказывания,
- приводить примеры и контрпримеры,
- строить высказывания и отрицания высказываний

ФГОС СОО (2022), Кодификатор ЕГЭ

БУ: Предметные результаты

1)

- владение **методами** доказательств,
- умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их,
- **проводить доказательные рассуждения при решения задач**

Далингер В.А.
Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем

Цепочка последовательно связанных ***силлогизмов****, устанавливающая истинность теоремы, называется* ***доказательством теоремы***

Справка

Дедуктивное умозаключение или ***дедукция*** (от лат. «выведение») – умозаключение от общего суждения к частному (единичному).

Силлогизм – дедуктивное умозаключение, в котором вывод получают из двух посылок – суждений, имеющих **общий (средний) термин**.

Посылка - общее суждение, называется большей **(большой) посылкой**, а второй ее термин (не средний) – большим термином.

Посылка с частным случаем, называется меньшей **(малой) посылкой**, а другой (не средний) ее термин – меньшим термином. Больший и меньший термины называются **крайними** терминами.

Справка

В заключение (вывод) силлогизма **входят крайние** и **не входит средний термин.**

Аксиома силлогизма: все, что утверждается относительно множества элементов распространяется на любой элемент этого множества.

Логическая схема силлогизма выглядит так:

$$\boxed{(P(x) \Rightarrow Q(x),\ P(a)) \Rightarrow Q(a)}$$

Пример

Б. п. Параллелограммом называется выпуклый четырёхугольник с попарно параллельными противоположными сторонами.

М. п. *ABCD* - параллелограмм с противоположными сторонами *AB* и *CD.*

____

Вывод. *AB* параллельна *CD*

$$\boxed{(P(x) \Rightarrow Q(x),\ P(a)) \Rightarrow Q(a)}$$

Пример

Б. п. называется выпуклый четырёхугольник с попарно параллельными противоположными сторонами.

М. п. *ABCD* - с противоположными сторонами *AB* и *CD.*

Вывод. *AB* параллельна *CD*

$$(P(x)\Rightarrow Q(x),\ P(a))\Rightarrow Q(a)$$

Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе : Кн. для учителя (https://www.mathedu.ru/text/sarantsev_obuchenie_matematicheskim_dokazatelstvam_v_shkole_2000/p0/)

Доказательства представляют собой цепочки умозаключений (правильных), ведущих от истинных посылок (исходных для данного доказательства суждений) к доказываемым (заключительным) тезисам.

Основные элементы доказательства

1) **Тезис**, установить истинность которого – главная цель доказательства. Форма выражения тезиса – суждение.
2) **Аргументы** (основания)доказательства – положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов – суждения. Связывая аргументы, приходим к умозаключениям, которые строятся по определенным правилам.
3) **Демонстрация** – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

Метод доказательства

Способ связи аргументов

от условия к заключению

Доказательства в школьных учебниках и пособиях

Доказательства теорем

Прямые доказательства

и

косвенные доказательства

Математика.
Геометрия :
7-9-е классы :
базовый уровень :
учебник /
Л. С. Атанасян,
В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев,
Э. Г. Позняк,
И. И. Юдина

§1 Первый признак равенства треугольников

15. Первый признак равенства треугольников

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы.** Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Глава I

Начальные геометрические сведения

§6 Перпендикулярные прямые

11. Смежные и вертикальные углы

На рисунке 47 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. **вертикальные углы равны.**

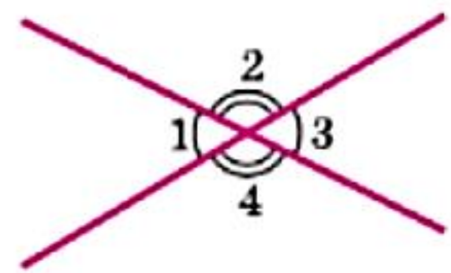


Рис. 47

На рисунке 47 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. **вертикальные углы равны.**

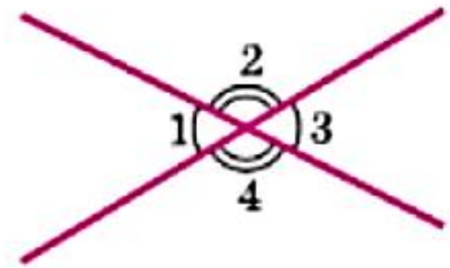


Рис. 47

Дано: $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы.

Доказать: $\angle 1 = \angle 3$.

Доказательство:

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

$\angle 1 = 180° - \angle 2$

Аналогично,

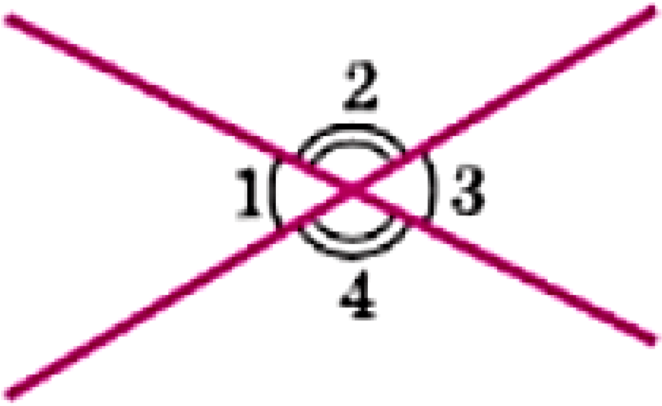
$\angle 3$ и $\angle 2$ – смежные углы

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$

$\angle 3 = 180° - \angle 2$

$\angle 1 = \angle 3$

Дано: $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы.
Доказать: $\angle 1 = \angle 3$.
Доказательство:
$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 = 180° - \angle 2$
Аналогично,
$\angle 3$ и $\angle 2$ – смежные углы
$\angle 3 + \angle 2 = 180°$
$\angle 3 = 180° - \angle 2$
$\angle 1 = \angle 3$



Можно ли назвать эти рассуждения доказательством?

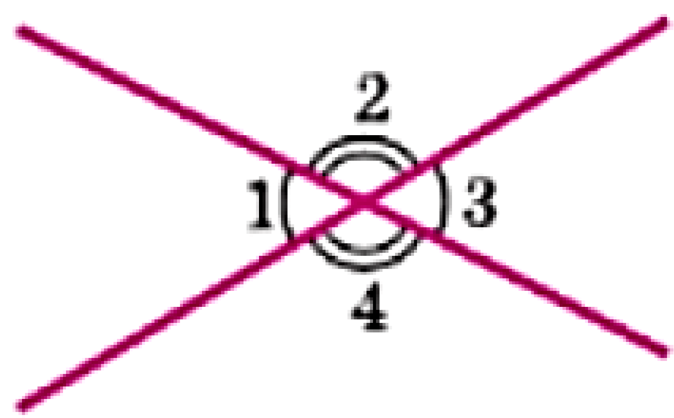
Нужна цепочка

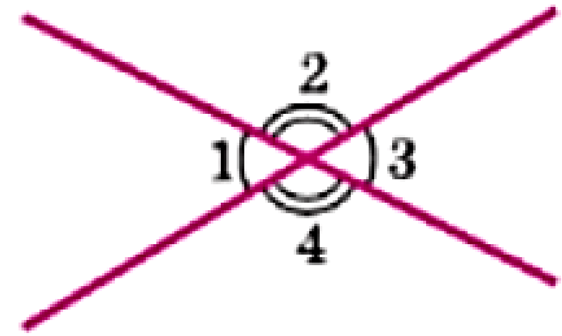
Дано: $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы.
Доказать: $\angle 1 = \angle 3$.
Доказательство:
$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы $\Rightarrow$
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\Rightarrow$
$\angle 1 = 180° - \angle 2$
Аналогично,
$\angle 3$ и $\angle 2$ – смежные углы
$\angle 3 + \angle 2 = 180°$
$\angle 3 = 180° - \angle 2$
$\angle 1 = \angle 3$

Следовательно

Отсюда

Поэтому





Обоснования

Дано: $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы.

Доказать: $\angle 1 = \angle 3$.

Доказательство:

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы $\Rightarrow$

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\Rightarrow$

$\angle 1 = 180° - \angle 2$

Аналогично,

$\angle 3$ и $\angle 2$ – смежные углы

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$

$\angle 3 = 180° - \angle 2$

$\angle 1 = \angle 3$

По определению

По свойству смежных углов

По свойству верных числовых равенств

Приёмы работы с готовыми доказательствами

- **разбиение доказательства на отдельные шаги** (силлогизмы)
- символическая запись доказательства
- вопросы по узловым частям доказательства
- восстановление небольших пропусков
- восстановление выводов по аргументации и наоборот
- …

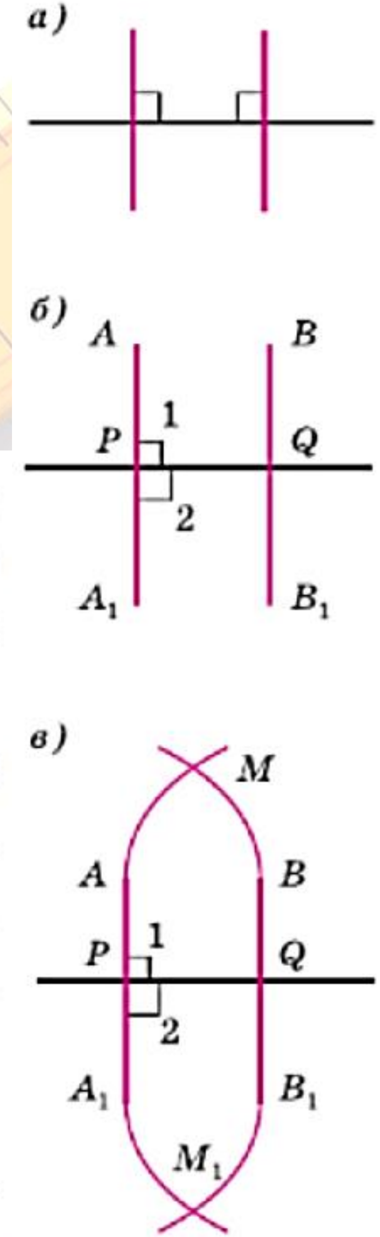
12. Перпендикулярные прямые

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 49, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 49, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 49, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.



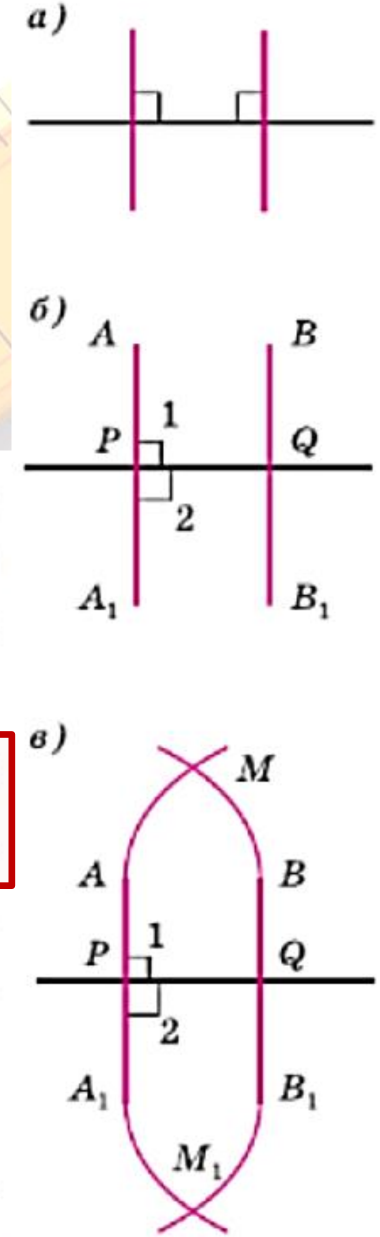
12. Перпендикулярные прямые

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 49, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 49, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 49, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.



Гл. 1, § 2, п.2 Некоторые методы математического доказательства

Алгоритм доказательства методом от противного

1) Предположить, что доказываемое утверждение неверно.
2) Исходя из этого предположения либо получить противоречие, либо прийти к выводу об истинности заведомо ложного утверждения.
3) Сформулировать вывод о том, что сделанное предположение неверно, а значит, верно доказываемое утверждение.

Л. Г. Петерсон,
Д. Л. Абраров,
Е. В. Чуткова

Доказательства в задачах

Тип 1. Задачи на подведение под определение, признак (задачи на распознавание объекта)

Тип 2. Задачи с прямым доказательством

Тип 3. Задачи с косвенным доказательством (от противного)

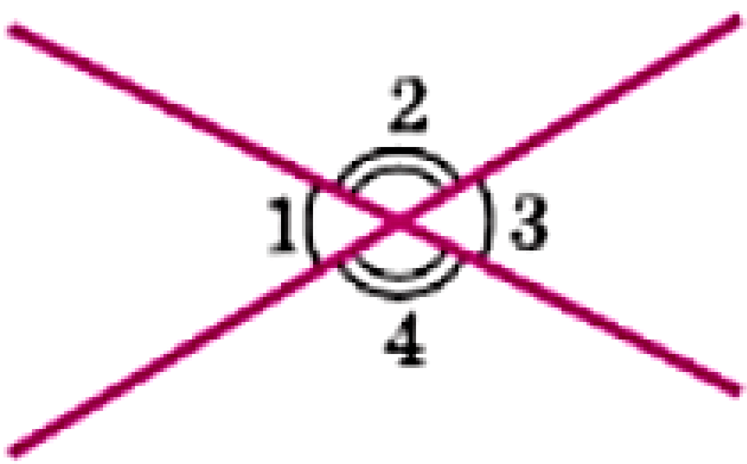
Тип 4. Доказательства в задачах на вычисление величины

Тип 5. Доказательства в задачах на построение

Тип 1.
Задачи на подведение
под определение, признак
(задачи на распознавание объекта)

Пример

Найдите на рисунке смежные и вертикальные углы.

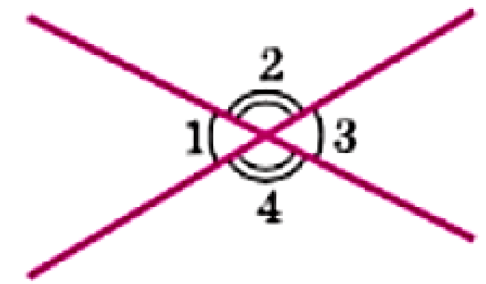


Почему задачу можно считать задачей на доказательство?

Определение. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

Пример

Найдите на рисунке смежные и вертикальные углы.



При решении делаем дедуктивный вывод

Б. п.

Определение. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

М. п.

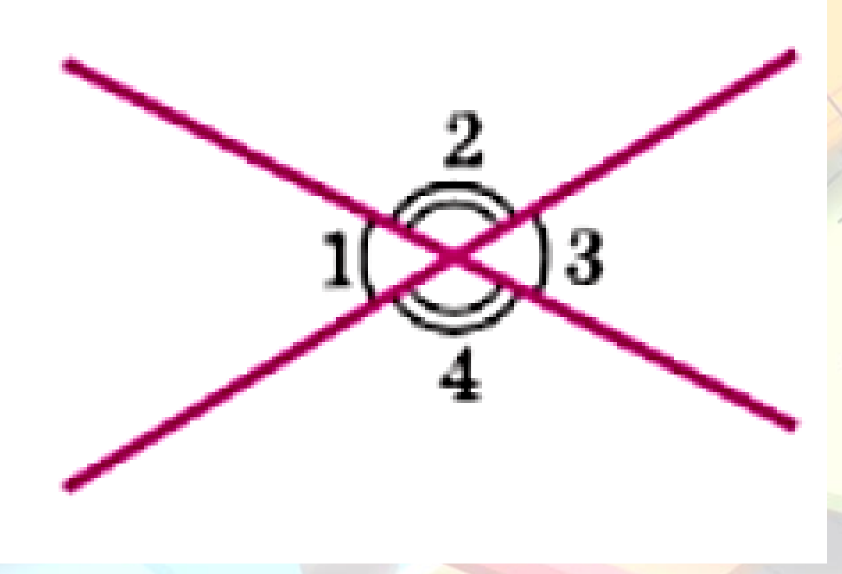
$\angle 1$ и $\angle 2$ имеют общую сторону, и две другие их стороны образуют прямую.

Вывод

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы.

Пример

Найдите на рисунке смежные и вертикальные углы.



В учебнике нет такой задачи

Рабочая тетрадь к учебнику

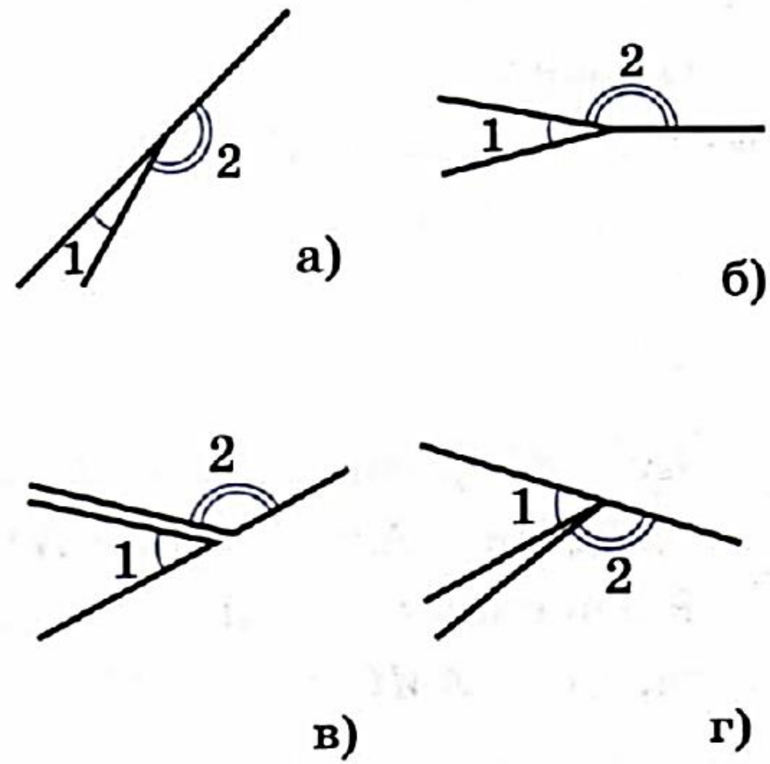
41

На каком из рисунков *а — г* углы 1 и 2 смежные? Объясните ответ.

Решение. Смежными называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжением ________________

Углы 1 и 2 имеют общую сторону на рисунках *а*, ___. Две стороны углов 1 и 2 являются продолжением одна другой на рисунках _____. Оба условия выполняются на рисунке ___, т. е. углы 1 и 2 являются смежными на рисунке ___

Ответ. Смежные углы — на рисунке ___



Цифровая рабочая тетрадь к учебнику

https://hw.lecta.ru

№ 41 Определение смежных углов на рисунке

Цифровая тетрадь УМК Атанасян Л.С. и др. (2024) > 1. Начальные геометрические сведения > 6. Перпендикулярные прямые

Выполни задание

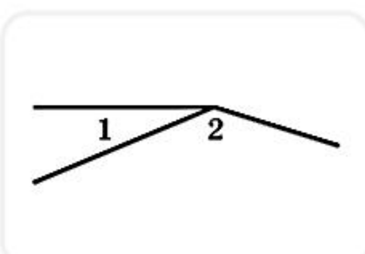
Заполни пропуски.

Углы называются смежными, если у них:

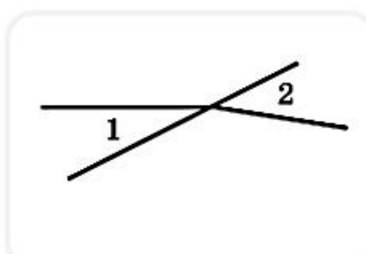
1) одна сторона ______ ;

2) две другие являются ______ одна другой.

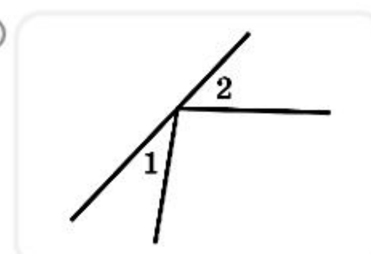
На каком из рисунков углы 1 и 2 являются смежными?



а)



б)



в)

Цифровая рабочая тетрадь

Выбери верные утверждения

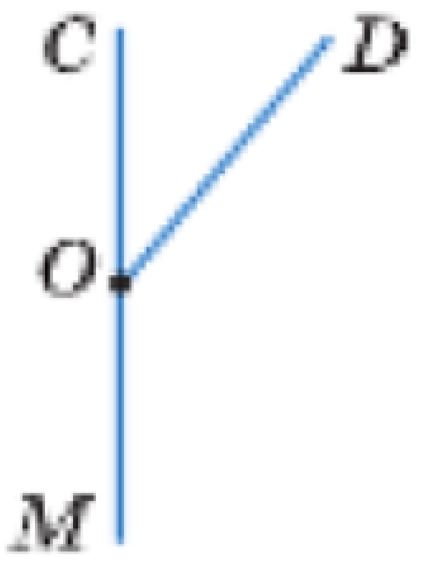
1. Выбери из предложенных ниже утверждений верные.

- ☐ 1) Сумма углов 1 и 2 равна 180°, значит, углы 1 и 2 смежные.
- ☐ 2) Углы 1 и 2 имеют общую сторону, а две другие являются продолжениями одна другой, значит, углы 1 и 2 смежные.
- ☐ 3) Сумма углов 1 и 2 равна 180°, и они имеют общую вершину, значит, углы 1 и 2 смежные.
- ☐ 4) Сумма углов 1 и 2 равна 180°, и они имеют общую сторону, значит, углы 1 и 2 смежные.

Задачи на подведение под определение есть и в 5-ом классе!

Углом называют фигуру, которая состоит из точки — вершины угла — и двух различных лучей, исходящих из этой точки, — сторон угла.

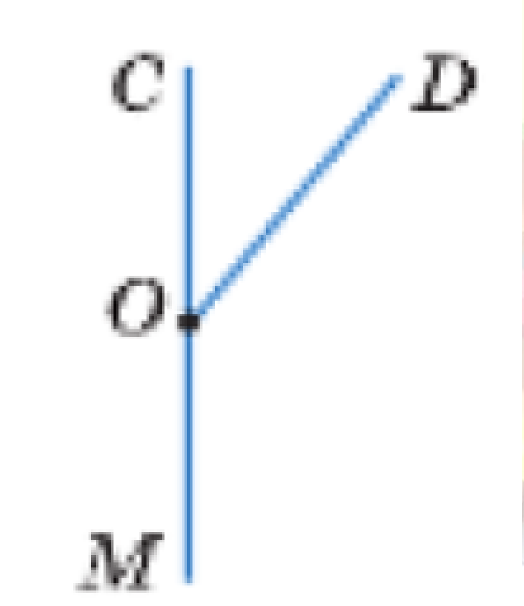
1.94. Назовите углы на рисунке. Сколько углов на этом рисунке?



Задачи на подведение под определение есть и в 5-ом классе!

Углом называют фигуру, которая состоит из точки — вершины угла — и двух различных лучей, исходящих из этой точки, — сторон угла.

1.94. Назовите углы на рисунке. Сколько углов на этом рисунке?



Методические кейсы

https://edsoo.ru/metodicheskie_kejsy/

Характеристические особенности изучения темы «Наглядная геометрия» в 5-м классе

- Непрерывность процесса развития у учащихся способности к рассуждению.
- Формирование умений логического мышления, в том числе пользоваться методами доказательств и построения цепочки логически верных утверждений.
- Формирование пространственного мышления.

Задачи на доказательство

Первая задача на доказательство

7 класс

74. Через точку *A*, не лежащую на прямой *a*, проведены три прямые, пересекающие прямую *a*.
Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой *a*.

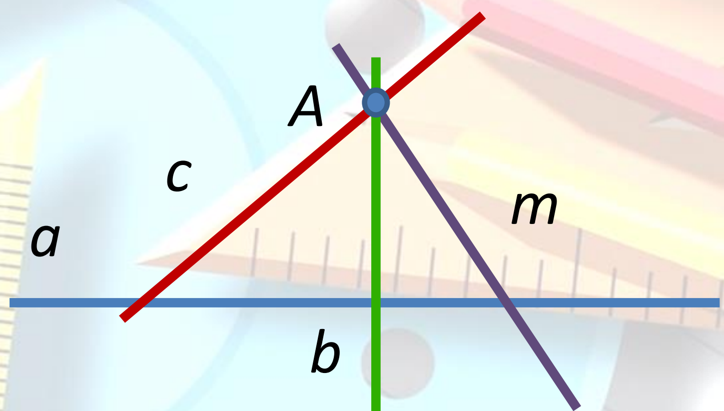
Первая задача учебника с требованием «Докажите»

Первая задача на доказательство

7 класс

74. Через точку *A*, не лежащую на прямой *a*, проведены три прямые, пересекающие прямую *a*.

Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой *a*.



Прямое или косвенное доказательство?

Тип 2. Задачи с косвенным доказательством

74. Через точку *A*, не лежащую на прямой *a*, проведены три прямые, пересекающие прямую *a*.

Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой *a*.

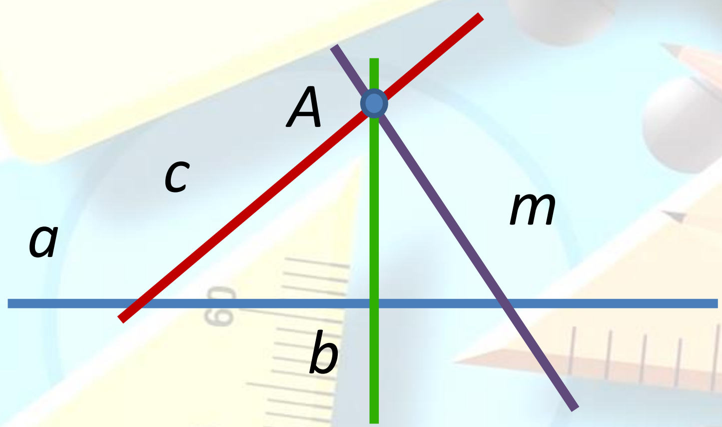


Схема доказательства

Тип 2.
Задачи с прямым доказательством

Первая задача на прямое доказательство

7 класс (учебник)

64. Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

Нет требования «Докажите»

Ответ. Верно.

Дано: $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle 1$ и $\angle 2$ – прямые углы.

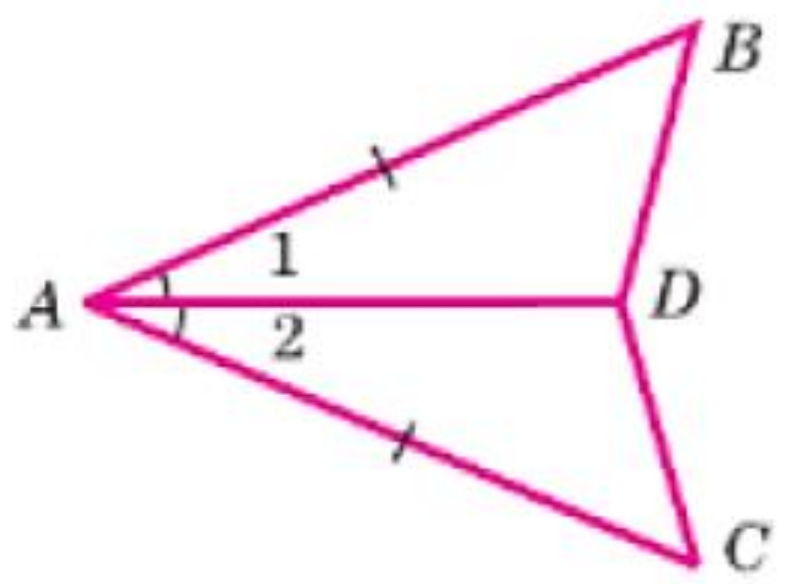
Доказательство:

Выводы	Почему?
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$	$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы
$\angle 1 + \angle 1 = 180°$	$\angle 1 = \angle 2$
$2\angle 1 = 180°$	
$\angle 1 = 90°$	
$\angle 2 = 90°$	$\angle 1 = \angle 2$

Первые задачи на доказательство

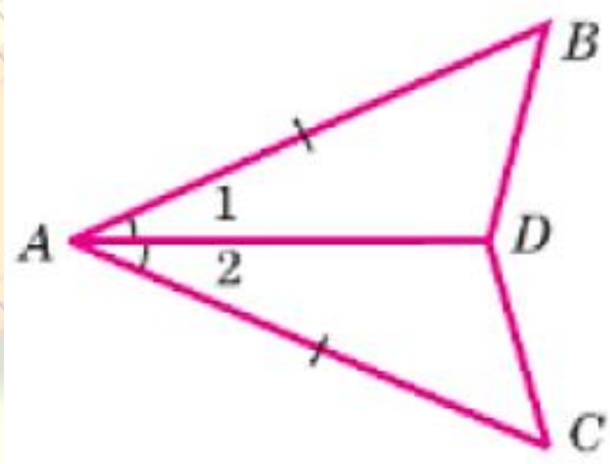
98. Отрезки *AE* и *DC* пересекаются в точке *B*, являющейся серединой каждого из них. **Докажите**, что треугольники *ABC* и *EBD* равны.

99. На рисунке *AB* = *AC*, $\angle 1 = \angle 2$. **Докажите**, что треугольники *ABD* и *ACD* равны.



Первые задачи на доказательство

99. На рисунке $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. **Доказать**, что треугольники ABD и ACD равны.



Дано: В треугольниках ABD и ACD
$AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$

Доказать: $\Delta ABD = \Delta ACD$.

Доказательство:

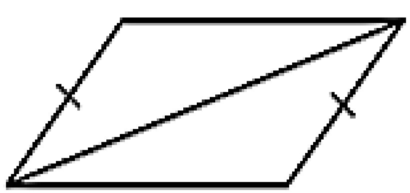
1) $AD = AD$ (общая сторона треугольниках ABD и ACD)

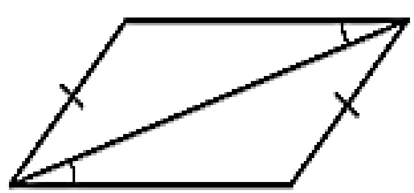
2) $\Delta ABD = \Delta ACD$ (по первому признаку равенства треугольников), т.к. AD – их общая сторона, по условию $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$

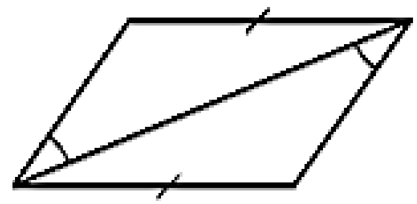
Цифровая рабочая тетрадь

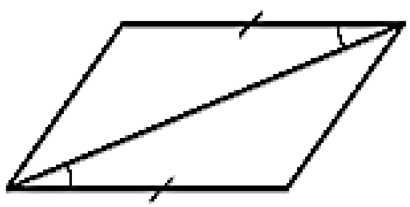
Выбери верное изображение

Выбери рисунок, на котором равенство изображённых треугольников можно утверждать на основании первого признака равенства треугольников.



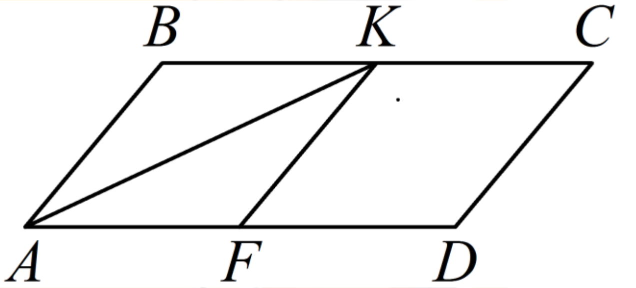






№ 24 (ОГЭ)

Сторона *BC* параллелограмма *ABCD* вдвое больше стороны *AB*. Точка *K* – середина стороны *BC*. Докажите, что *AK* - биссектриса угла *BAD.*



Доказательство (***из критериев***)

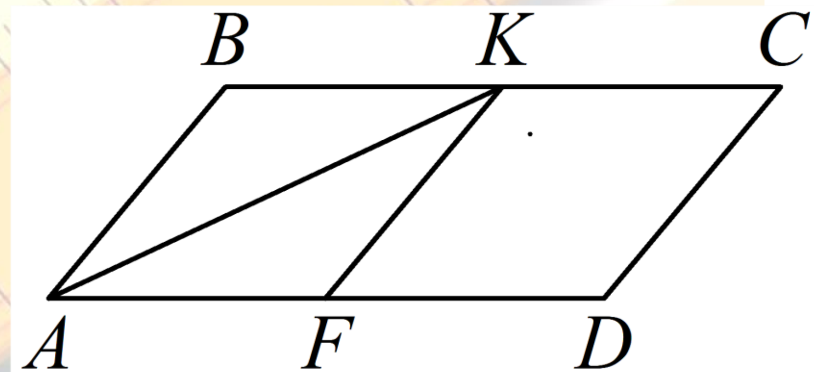
Проведём прямую *KF*

параллельно стороне *AB*.

Поскольку *BK* = *KC* = *AB* , параллелограмм *ABKF* является ромбом, поэтому диагональ *AK* ромба делит угол *BAF* пополам. Значит, *AK* — биссектриса угла *BAD*.

Приёмы работы с готовым доказательством

Сторона *BC* параллелограмма *ABCD* вдвое больше стороны *AB*. Точка *К* – середина стороны *ВС*. Докажите, что *АК* - биссектриса угла *BAD.*



Разбиение на шаги,

Восстановление обоснований

Проведём прямую *KF* параллельно стороне *AB*.

1) *ABKF* – параллелограмм (восстановите обоснование).

2) *BK = KC = AB (-//-)*.

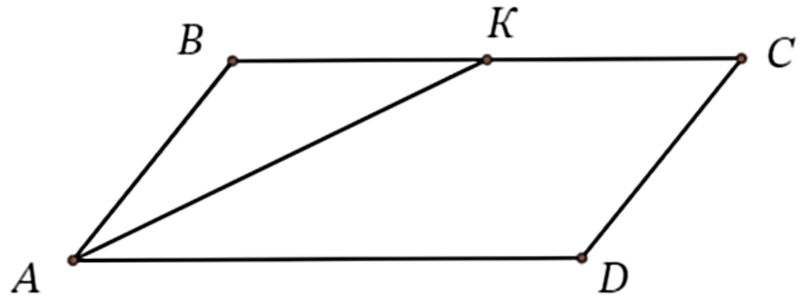
3) *ABKF* – ромб *(-//-)*.

4) диагональ *AK* ромба делит угол *BAF* пополам *(-//-)*.

5) Значит, *AK* — биссектриса угла *BAD (-//-)*.

Приёмы работы с готовым доказательством

Сторона *BC* параллелограмма *ABCD* вдвое больше стороны *AB*. Точка *K* – середина стороны *BC*. Докажите, что *AK* - биссектриса угла *BAD.*



Символическая запись

Доказательство.

$BK = KC = AB$ (из условия) $\Rightarrow$

$\Delta\, ABK$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle\ BAK = \angle\ BKA$ (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle\ KAD = \angle\ BKA$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AK) $\Rightarrow$

$\angle\ BAK = \angle\ KAD$ $\Rightarrow$ AK — биссектриса угла BAD.

Тип 4.
Доказательства в задачах на вычисление величины

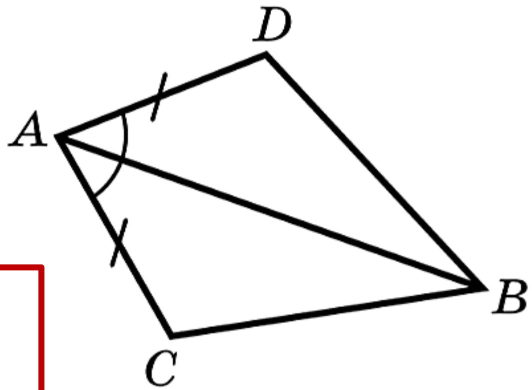
Цифровая рабочая тетрадь

№ 62 Доказательство равенства элементов двух треугольников с использованием первого признака равенства треугольников (Вариант 1)

Нет требования «Докажите»

Впиши ответ

У треугольников ABC и ABD сторона AB общая, $\angle CAB = \angle DAB$, $AC = AD = 8$ *см*. Найди BD при условии, что $BC = 11$ *см*.



Решение.

У треугольников ABC и ABD сторона AB ______ ,

$\angle CAB = \angle$ ______ и $AC =$ ______ .

Следовательно, по ______ признаку равенства треугольников

ΔABC ______ ΔABD.

Доказательство

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Значит, $DB =$ ______ (лежат против равных углов DAB и ______). Отсюда получаем, что $DB =$ ______ *см*.

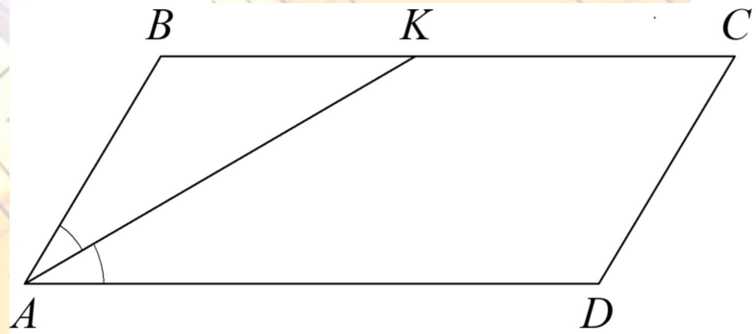
Ответ. $BD =$ ______ *см*.

№ 23 (ОГЭ)

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точке K.

Найдите периметр параллелограмма,

если $BK = 10$, $CK = 18$.



Решение (из критериев)

Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. AK — биссектриса угла BAD, следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$.

Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK$ = 10.

По формуле периметра параллелограмма находим:

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 76.$$

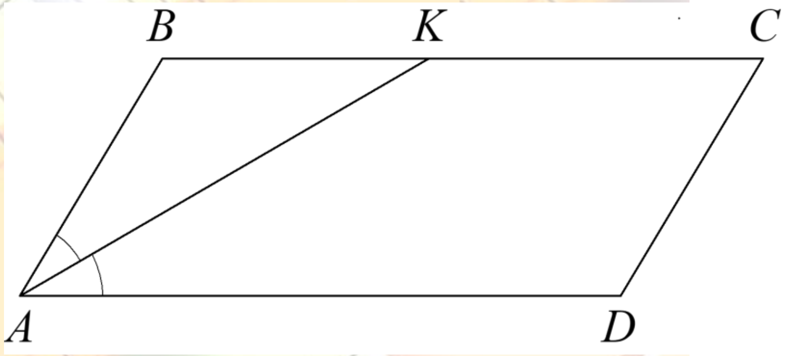
Ответ: 76.

Выделение доказательной части и шагов доказательства

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точке K.

Найдите периметр параллелограмма,

если $BK = 10$, $CK = 18$.



Решение

1) $\angle BKA = \angle KAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK.

2) $\angle KAD = \angle BAK$, т.к. AK — биссектриса угла BAD.

3) Следовательно, $\angle BKA = \angle BAK$.

4) Значит, треугольник BKA равнобедренный

5) $AB = BK$ $= 10$.

По формуле периметра параллелограмма находим:

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 76.$$

Ответ: 76.

Тип 5.
Доказательства в задачах на построение

Рабочая тетрадь (7 класс)

156

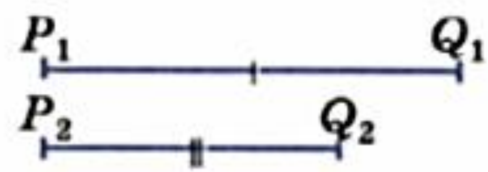
Нет требования «Докажите»

Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла. (Задача 286 учебника.)

Решение. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рисунок *a*).

Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, например AC, равна данному отрезку P_1Q_1, угол A равен данному углу hk, а биссектриса AD этого треугольника равна данному отрезку P_2Q_2.

Этапы решения:



1) анализ (нисходящий)
2) построение
3) доказательство (синтетическим методом)
4) исследование

Рабочая тетрадь (7 класс)

Построение (рисунок *б*).

1) Построим угол XAY, равный данному углу hk.

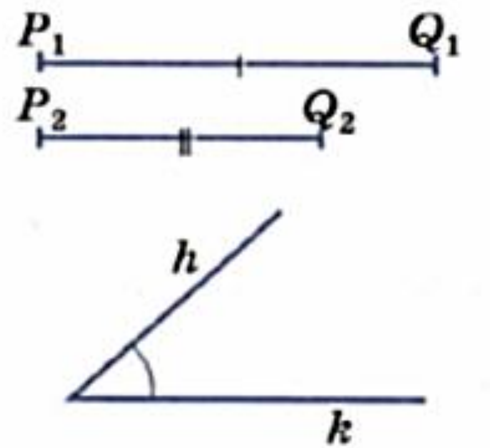
2) На луче AY отложим отрезок AC, равный данному отрезку P_1Q_1.

3) Построим биссектрису AF угла XAY.

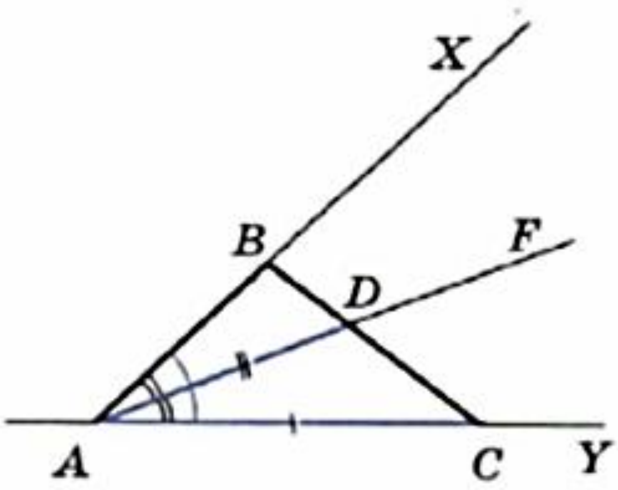
4) На луче AF отложим отрезок AD, равный данному отрезку P_2Q_2.

5) Искомая вершина B — точка пересечения луча AX с прямой CD.

Построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AC = P_1Q_1$, $\angle A = \angle hk$, $AD = P_2Q_2$, где AD — биссектриса треугольника ABC.



а)



б)

Доказательство

Учебник (7 класс)

334. Даны угол и отрезок *AB*. Постройте точку *M*, равноудалённую от сторон угла и такую, что *MA* = *MB*.

	Построение	Доказательство
1)	Угол *XVY*, равный данному	Угол *XVY* равен данному углу (по основному построению)
2)	*VP* - биссектриса угла *XVY*	*M* принадлежит биссектрисе *VP* (по свойству ГМТ, равноудалённых от сторон угла)
3)	Прямая *c* - серединный перпендикуляр к отрезку *AB*	*M* принадлежит прямой *c* (по свойству ГМТ точек, равноудалённых от концов отрезка)
4)	$M = VP \cap c$	*M* – искомая (согласно методу ГМТ)

Саранцев Г.И.
Обучение математическим доказательствам в школе :
Кн. для учителя

Обучение доказательству

Обучение

- **анализу готовых доказательств**
- **их воспроизведению**
- самостоятельному открытию факта
- поиску и конструированию доказательства
- опровержению предложенных доказательств

Уровни в обучении доказательству

5-6 кл.

- Формирование потребности в логических обоснованиях
- Формирование умения делать дедуктивные выводы

6-7 кл.

- Обучение эвристическим приёмам и их применению
- Обучение выполнению цепочки логических шагов

7 кл.

- Обучение самостоятельному разбору готового доказательства
- Формирование умения выделять идею доказательства

7-8 кл.

- Обучение использованию методов научного познания
- **Самостоятельное доказательство**

9-11 кл.

- Обучение умению опровергать предложенные доказательства

Типы и примеры заданий

Упражнения, способствующие формированию потребности в логическом обосновании утверждений

1) Верны ли утверждения
2) Существует ли
3) Может ли
4) …

Примеры

3. Об углах 1 и 2 известно, что их сумма равна 180°. Можно ли утверждать, что углы 1 и 2 смежные? Как дополнить условие, чтобы из него следовало заключение?

4. Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

Примеры

3. Об углах 1 и 2 известно, что их сумма равна 180°. Можно ли утверждать, что углы 1 и 2 смежные? Как дополнить условие, чтобы из него следовало заключение?

4. Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

Решение. Две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Прямые AP и AQ пересекаются в точке A. Поэтому прямые AP и AQ не перпендикулярны к прямой a.

Решение данной задачи является *одношаговым*, основу его составляет правило отрицания. Использование доказательств следует начинать с таких одношаговых задач, переходя затем к *двушаговым* и т. д.

Формирование умения делать дедуктивные выводы

1) Подведение под понятие
2) Выведение следствий
3) Выяснение структуры умозаключений
4) Переформулировка требования задачи

Подведение под понятие

Какие из углов 1 и 2 (рис. 8, *а — г*) являются смежными?

Углы 1 и 2 (рис. 8, *а*) являются смежными, потому что у них общая сторона, а две другие образуют дополнительные лучи. Полная структура обоснования такова:

Если у двух углов одна сторона общая, а две другие образуют дополнительные лучи, то такие лучи являются смежными. *(Большая посылка.)*

Углы 1 и 2 имеют одну общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами. *(Малая посылка.)*

Углы 1 и 2 смежные. *(Вывод.)*

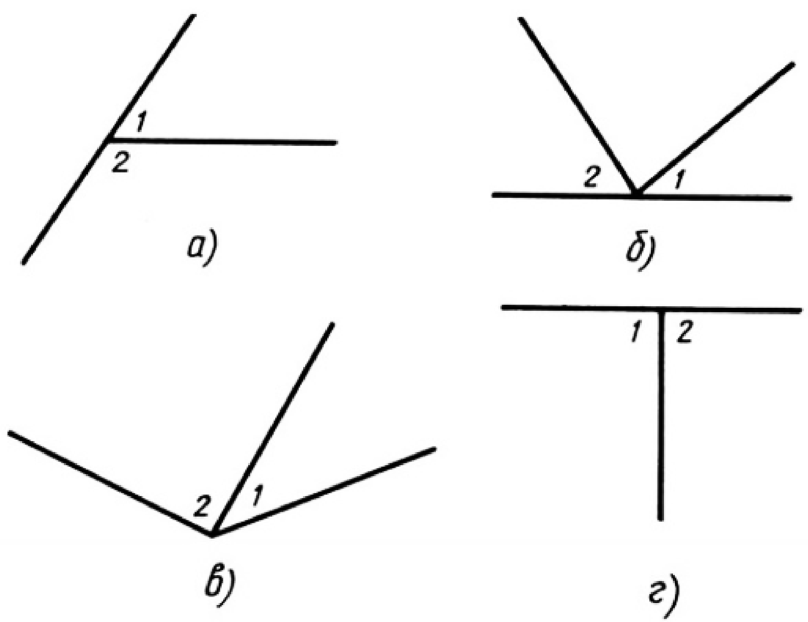


Рис. 8

Восстановление посылок

Запишите пропущенные утверждения:

1) . . . .

Углы 1 и 2 вертикальные.

$\angle 1 = \angle 2$.

2) Вертикальные углы равны.

. . . .

$\angle 1 = \angle 2$.

3) Углы в основании равнобедренного треугольника равны.

$\triangle ABC$ — равнобедренный.

. . . .

Выведение следствий

8. Точка C лежит между точками A и B, а точка X — между точками A и C. Докажите, что точки A, B, C и X принадлежат одной прямой. Сформулируйте все утверждения, полученные в процессе решения этой задачи.

9. Точка X принадлежит отрезку AB и не совпадает ни с точкой A, ни с точкой B. Что следует из этого?

Переформулировка требования

Замена требования задачи новым так,

чтобы из него вытекало первоначальное требование

Пример

3) Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

Учитель обращается к ученикам с вопросом:

«Каким предложением можно заменить требование задачи?» Ученик отвечает: «Доказать, что угол между биссектрисами вертикальных углов развёрнутый»

Далее следует дальнейший поиск решения задачи, который заканчивается выяснением способа решения — доказательством того, что $\angle MOK = 180°$, где лучи OM и OK — биссектрисы вертикальных углов AOB и COD, с опорой на свойство смежных углов. Запись решения задачи:

$$\angle MOK = \angle MOA + \angle AOC + \angle COK =$$
$$= \frac{1}{2}\angle AOB + \angle AOC + \frac{1}{2}\angle COD = \angle AOB + \angle AOC = 180°.$$

Что в итоге?

Достижение

Предметных результатов (умения решать задачи)

Метапредметных результатов (базовые логические действия:

- разбирать доказательства математических утверждений (прямые и от противного),
- проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов,
- выстраивать аргументацию,
- приводить примеры и контрпримеры,
- обосновывать собственные рассуждения